

ПМИ, 2021-22 уч. год

Прикладные дифференциальные уравнения

Прикладные дифференциальные уравнения (1 сентября 2021)

Щуров И.В.

1 Аннотация

Дифференциальные уравнения — основной инструмент математического моделирования в различных областях, где рассматриваются системы, меняющие своё состояние с течением времени — от механики до экономики. Представленный курс состоит из двух частей. В первой приводится введение в теорию дифференциальных уравнений и основные инструменты их исследования — как аналитические, так и численные. Во второй студенты выполняют индивидуальные практические проекты, направленные на создание программных продуктов, ядром которых является решение дифференциальных уравнений — например, систем моделирование физики для компьютерных игр, сред для симуляций поведения роботов, интерактивных визуализаций задач небесной механики и т.д. От студентов ожидается знакомство с курсами математического анализа (одномерного и многомерного) и линейной алгебры, а также навык программирования на любом императивном языке программирования.

2 Цели освоения дисциплины

- Развитие навыков применения инструментария дифференциальных уравнений для решения прикладных задач.
- Знакомство с численными методами решения дифференциальных уравнений.
- Освоение компьютерных инструментов для решения и анализа дифференциальных уравнений в различных программных средах.

3 Планируемые образовательные результаты

Планируется, что по итогам освоения дисциплины студенты будут

- владеть навыками численного решения дифференциальных уравнений;
- владеть компьютерными инструментами решения дифференциальных уравнений;
- уметь комбинировать аналитические и численные методы анализа дифференциальных уравнений.

4 Структура и содержание дисциплины

1. **Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.** Дифференциальное уравнение, решение, расширенное фазовое пространство, интегральная кривая, поле направлений, автономное дифференциальное уравнение, фазовое пространство, векторное поле, фазовая кривая, задача Коши, теорема существования и единственности решения, производная вдоль векторного поля, первые интегралы, положения равновесия, устойчивость.
2. **Численные методы решения дифференциальных уравнений.** Метод Эйлера. Оценка его точности. Методы Рунге — Кутты. Другие методы. Сравнение точности различных методов. Методы решения жестких задач.
3. **Линейные дифференциальные уравнения.** Уравнения с постоянными коэффициентами, матричная экспонента. Численное нахождение матричной экспоненты. Уравнения с переменными коэффициентами.
4. **Аналитические методы теории дифференциальных уравнений.** Линеаризация, уравнение в вариациях, метод малого параметра.
5. **Качественная теория.** Фазовые портреты. Структурная устойчивость. Бифуркации. Хаотическая динамика.

Порядок следования тем может незначительно меняться для удобства изложения.

5 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

5.1 Основной учебник

- Хайрер, Э., Нерсетт, С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: нежесткие задачи. 1990, Москва.

5.2 Дополнительная литература

- Арнольд, В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, 2000.

6 Формы и методы контроля знаний

6.1 Домашние задания

Условия домашних заданий публикуются на странице курса. Они выполняются письменно и сдаются в электронном виде. По каждому домашнему заданию в момент его публикации устанавливается срок сдачи, который впоследствии не меняется (за исключением обстоятельств непреодолимой силы, затрагивающих всех

студентов). В случае сдачи работы после срока сдачи работа может быть не принята либо баллы за работу могут быть выставлены со штрафом в соответствии с правилами, опубликованными вместе с работой. Если штрафы не указаны, значит, работа после срока сдачи не принимается и выставляется оценка 0. Если студент не может сдать работу в срок по каким-то техническим причинам, ему/ей необходимо как можно быстрее известить об этом лектора, например, по e-mail. Работа может быть принята после срока без штрафных санкций при наличии разумных причин невозможности её сдачи в срок и убедительных доказательств её существования в итоговом виде до срока сдачи.

Оценка за каждое домашнее задание является вещественным числом от 0 до 10. Если в задании предусмотрены дополнительные поощрения (например, за отличное оформление и чёткое изложение), оценка может оказаться чуть больше 10.

Оценка за все домашние задания вычисляется как среднее арифметическое от оценок за каждое задание. При необходимости по решению лектора оценки за какие-то особенно объёмные задания могут включаться с большим весом в итоговую оценку, в этом случае соответствующий вес указывается в задании при его публикации.

Всего планируется 4-6 домашних заданий. В каждом домашнем задании есть одно или несколько заданий повышенной сложности, которые необходимо сделать для получения оценки 10.

Общий вес домашних заданий в итоговой оценке составляет 60%.

6.1.1 Примеры заданий

1. Сравните точность методов Эйлера и Рунге — Кутты четвертого порядка для численного решения уравнения мальтузианского роста популяции.
2. Разработайте метод численного решения дифференциального уравнения, сохраняющий значение первого интеграла вдоль траекторий.
3. Найдите производную решения ОДУ по начальному условию двумя способами: путём численного дифференцирования численного найденного решения и с помощью уравнения в вариациях. Сравните точность и сложность.

6.2 Итоговые проекты

В процессе освоения материалов дисциплины студенты выполняют практический проект. Проект может выполняться индивидуально или в паре. В последнем случае ожидаемая трудоёмкость проекта соответствующим образом увеличивается, также должен быть выделен индивидуальный вклад каждого студента в итоговый проект. При этом оба участника проекта должны владеть материалом всего проекта.

Экзамен проводится в виде публичной защиты итоговых проектов. Вес экзамена в итоговой оценке — 40%.

Оценка 10 за экзамен выставляется в том случае, если итоговый проект имеет очевидную внешнюю ценность (например, представлена программная библиотека,

которую могут использовать другие разработчики, или образовательный материал, который может использоваться в других курсах).

6.2.1 Примеры заданий

Возможные темы итоговых проектов публикуются не позднее чем за месяц до даты экзамена.

Ориентировочно, темы могут выглядеть примерно так.

1. Разработайте среду для моделирования динамики механического робота для задач обучения с подкреплением.
2. Исследуйте динамику SIR-модели распространения эпидемии на графе, опишите возникающие там динамические явления.
3. Исследуйте различные механизмы изменения активности нейронов с помощью модели Фитцхью — Нагумо.

6.3 Округление

Промежуточные оценки хранятся как вещественные числа двойной точности в соответствии со стандартом IEEE 754 и не округляются специальным образом. Оценка за курс округляется до ближайшего целого числа; полуполые числа (то есть числа вида $k + 1/2$, где k — целое) округляются вверх (до $k + 1$).

7 Пересдача

В случае получения неудовлетворительной оценки за курс студент имеет право на пересдачу. Студент может досдать несделанные или пересдать плохо сделанные домашние задания, однако в этом случае оценка за них выставляется с понижающим коэффициентом 0.5. Пересдача экзамена проходит в том же формате защиты итоговых проектов.

В случае получения неудовлетворительной оценки по итогам пересдачи, студент имеет право на вторую пересдачу. В этом случае оценка выставляется по итогам написания письменной работы, основанной на материалах всего курса. Оценки по остальным формам контроля не учитываются. Оценка по итогам второй пересдачи не может превышать 5 баллов по 10-балльной шкале.

8 Об академической этике

На курсе недопустимы какие-либо нарушения академической этики. В частности, категорически недопустимы списывание, пособничество списыванию, плагиат, подлог. В случае обнаружения при проверке похожих письменных работ, сходство которых свидетельствует о несамостоятельном выполнении работы, каждая подозрительная работа получает 0 баллов независимо от направления списывания.

Учебный офис ставится в известность обо всех случаях нарушения академической этики.

Совместное обсуждение идей решений домашних заданий не запрещено. Однако студентам запрещено смотреть в текст чужого решения (до сдачи своей работы) или давать своё решение для прочтения другим студентом.

В случае возникновения сомнений в самостоятельности выполнения той или иной письменной работы студент может быть вызван на очную защиту этой работы. В случае, если на очной защите студент демонстрирует отсутствие владения материалом этой работы (не может ответить на вопросы по ней и т.д.), работа признаётся списанной.

9 Пропуски по уважительным причинам

Обо всех ситуациях, препятствующих выполнению каких-либо заданий по курсу или явке на контрольное мероприятие, следует незамедлительно сообщать в учебный офис. При необходимости в учебный офис предоставляются все подтверждающие документы. В случае признания причины пропуска уважительной, студенту может быть продлён срок сдачи задания (в случае домашних заданий), либо вес этого задания может быть перенесён на другую форму контроля по решению лектора.

10 Проверка работ

Студент имеет право получить комментарии по оценке за работу у того, кто её проверял, и предоставить свои возражения. Максимальный срок оспаривания составляет две недели с момента объявления оценки. В случае, если студент не оспорил оценку в этот срок, он считается согласным с оценкой.