

ПМИ, 2021-22 уч. год

Прикладные дифференциальные уравнения

Итоговые проекты (28 ноября 2021 г.)

Щуров И.В.

1 Общие правила

В процессе освоения материалов дисциплины студенты выполняют практический проект. Проект может выполняться индивидуально или в паре. В последнем случае ожидаемая трудоёмкость проекта соответствующим образом увеличивается, также должен быть выделен индивидуальный вклад каждого студента в итоговый проект. При этом оба участника проекта должны владеть материалом всего проекта.

Проекты могут выполняться в различной форме. Это может быть интерактивная научно-популярная статья, в которой анализируется некоторая система дифференциальных уравнений, может быть полноценное приложение или библиотека для моделирования каких-то явлений с помощью дифференциальных уравнений, может быть ещё что-то. Необходимо, чтобы в проекте решались и исследовались какие-то дифференциальные уравнения, чтобы это делалось в том числе с помощью численных методов, и чтобы было понятное текстовое описание происходящего.

Работа должна быть выполнена полностью самостоятельно. Текст должен быть написан своими словами. Если вы используете чужие фрагменты кода в работе (например, примеры из документации или вспомогательные функции, взятые со `stackoverflow`), вам необходимо явно отметить эти фрагменты и поставить ссылку на источник.

Экзамен проводится в виде публичной защиты итоговых проектов. Вес экзамена в итоговой оценке — 40%.

2 Критерии оценивания

Проекты оцениваются по следующим критериям.

2.1 Теоретическая составляющая

В проекте должно быть продемонстрировано владение теоретическими основами (понятиями и фактами) теории дифференциальных уравнений, обсуждавшимися в ходе курса. Например, если вы построили фазовый портрет системы с помощью компьютерных инструментов, и можете объяснить, что он означает, это хорошо. Но если вы можете доказать, что он (или какие-то его элементы) устроен так, как нарисовано, то это ещё лучше. Чем больше понятий и фактов из теоретической части курса вы используете, тем лучше.

2.2 Сложность численного анализа

Если вы просто построили решение или фазовый портрет с помощью одной очевидной команды, вы вряд ли получите много баллов за этот пункт. Если вы написали какой-то нетривиальный алгоритм, чтобы исследовать решения уравнения, выучили новый язык программирования для реализации проекта, столкнулись с техническими трудностями и успешно их преодолели, придумали нетривиальное техническое решение — всё это добавляет баллов.

2.3 Практическая полезность

Следует стремиться к тому, чтобы проект мог принести пользу внешнему миру. Например, если вы пишете научно-популярную статью, ориентируйтесь на то, чтобы её можно было опубликовать в соответствующих изданиях. Если вы пишете программу, она должна быть документирована и исходный код должен быть опубликован вместе с документацией, чтобы им могли пользоваться другие люди.

2.4 Научная составляющая

Если вы пишете о какой-то конкретной системе, пришедшей из приложений, вам нужно ознакомиться с научной литературой по этой теме, понимать, откуда система взялась, что означают её параметры и как можно проинтерпретировать полученные вами результаты, какие свойства системы известны человечеству и т.д. Если ваша работа не посвящена конкретной системе (например, вы пишете библиотеку для автоматического построения фазовых портретов с помощью D3.js), вы можете найти научные источники, которые решают сходные или связанные задачи, изучить их и описать в своей работе.

3 Темы проектов

Вот примеры тем проектов, которые можно выбрать. Этот список не является исчерпывающим, можно придумать и свою тему.

1. Задача трёх и более тел. Помимо собственно визуализации траекторий (в 2D или 3D) здесь есть количество сюжетов, которые можно изучить, про которые можно написать и которые можно визуализировать. Можно начать с Википедии и дальше пойти по ссылкам.
2. Осциллятор Ван дер Поля. Тут есть простой сюжет — в зависимости от значений параметров, динамика приближается либо к обычному гармоническому осциллятору, либо к так называемой быстро-медленной системе. (Возможно, часть из этого мы обсудим на занятиях.) Но есть и более сложный: если добавить периодическое возмущение, возникают хаотическое поведение. Было бы здорово это разобрать и визуализировать.

3. Модель Фитцхью — Нагумо. Это обобщение осциллятора Ван дер Поля. Активно применяется для моделирования процессов в физиологии, в частности, в вычислительной нейронауке. Можно начать со статьи в Scholarpedia.
4. Mckean model. Упрощённая версия модели Фитцхью — Нагумо. Можно начать со статьи в Scholarpedia.
5. Модели «хищник — жертва» и другие модели взаимодействия популяций. Разнообразные обобщения модели Лотки — Вольтерры. Одна из таких моделей с нетривиальным поведением описана в книге Ю. И. Неймарка (глава 9).
6. Аттрактор Лоренца. Есть вот такая статья, представляющая собой доработанную версию студенческой работы, так что совсем популярную работу сейчас делать уже не очень интересно. Что было бы круто — разобраться в работе Варвика Такера (и работах, на которые он ссылается), по крайней мере, на уровне геометрии, и подготовить экшнейпер по ней. Хотя это может быть нетривиально.
7. Теорема теннисной ракетки. Тут придётся немножко разобраться в механике твёрдого тела, но сама система уравнений несложная и демонстрирует интересный эффект. Было бы здорово про это написать и сделать соответствующие анимации.
8. Аттрактор Рёсслера. На удивление неплохая статья в английской Википедии. Воспроизвести результаты оттуда и построить интерактивную демонстрацию было бы уже неплохим упражнением. Изначально система Рёсслера была придумана из чисто математических соображений, но позже нашла своё применение в химии (см. напр. тут и ссылки там).
9. Можно взять какую-нибудь главу из книги Ю. И. Неймарка Математическое моделирование как наука и искусство, где рассматриваются модели на основе дифференциальных уравнений, и сделать на её основе интерактивную научно-популярную статью.
10. Можно сделать библиотеку на JavaScript, с помощью которой было бы легко рисовать интерактивные визуализации фазовых портретов. Для начала — аналог streamplot, но для получения высокой оценки нужно добавить какой-нибудь науки — например, автоматический анализ особых точек, построение сепаратрис и т.д. Начать можно с этой библиотеки. В идеале хотелось бы заменить статические фазовые портреты в учебнике <https://ode.mathbook.info> на их интерактивные версии.
11. А вот ещё есть интересная система — маятник Капицы. Про него тоже можно написать науч-поп статью — по-моему, я не видел хороших (хотя надо поискать).