Департамент политической науки, 2020-21 уч. год
Высшая математика
Лекция 1. Элементы финансовой математики, часть 1 (09.09.2020)
И. А. Хованская, Р. Я. Будылин, И. В. Щуров, Д. А. Филимонов, К. И. Сонин (РЭШ)

1 Процентные соотношения

Определение 1. Процентом от числа называется его сотая часть.

1% от числа $A = \dfrac{A}{100}$

Пример 1. Ставка подоходного налога в России составляет 13%. Какую сумму ежемесячно отчисляет в государственную казну человек с доходом 10 000 рублей?

Ответ: $\dfrac{10000}{100} \cdot 13 = 10000 \cdot 0,13 = 1300$

Для начала, рассмотрим простую задачу.[1]

Задача 1. Арбуз на 99% состоит из воды (по весу). После того, как он немного подсох, в нём стало 98% воды. Как изменился его вес?

Читая условие задачи, можно подумать, что вес останется почти таким же, поскольку доля воды изменится не слишком сильно. Однако, вычисления показывают, что это не так.
Решение. Допустим, арбуз весил 10 кг. (Мы не знаем, сколько он весил на самом деле, но часто при решении математических задач бывает полезно взять неизвестные данные произвольным образом, «с потолка», и использовать их при решении. Однако, важно после этого убедиться в том, что полученный ответ действительно не зависел от выбора этих произвольных данных.) Вода составляет 99%, то есть $10 \cdot \dfrac{99}{100} = 9.9$ кг. Оставшийся 1% (то есть 0.1 кг) составляет «сухое вещество».

После того, как арбуз слегка подсох, количество сухого вещества не изменилось. Но если доля воды в арбузе стала равной 98%, то доля сухого вещества стала равной 2%. Как так получается? Тут нужно понимать, что после высыхания проценты берутся не от «исходного» арбуза, а от уже подсохшего. Если 0.1 кг составляет 2% от всего арбуза, то 1% составит 0.05 кг, а 100% (то есть вес подсохший арбуз) составит $0.05 \times 100 = 5$ кг. Это ровно половина от исходного веса арбуза. Таким образом, после усыхания арбуз станет весить вдвое меньше.

Нетрудно видеть, что на самом деле ответ не будет зависеть от того, сколько весит арбуз. (Проверьте вычисления, взяв в качестве веса арбуза 5 кг или 15 кг.) Кратко, его можно подытожить следующим образом:

Поскольку доля сухого вещества в результате усушки увеличилась в два раза, и при этом количество этого сухого вещества не изменилось, значит, общий вес арбуза уменьшился в два раза. ■

[1] На лекции эта задача разбиралась в другой формулировке: «В выборах участвует кандидат от оппозиции и кандидат от власти. На начало избирательной кампании кандидат от власти имеет 99% голосов избирателей, причём все избиратели собираются прийти и проголосовать за одного из двух кандидатов. (Голосовать против всех нельзя.) В результате агитационной кампании оппозиции, часть электората кандидата от власти решила не ходить на выборы вовсе, а электорат кандидата от оппозиции не изменился. На выборах за кандидата от власти проголосовало 98% от числа избирателей, принявших участие в выборах. Какая часть избирателей не пришла на выборы?»

Эта задача весьма показательна в смысле целей нашего курса: цифры могут вводить в заблуждение, и нам нужно научиться видеть за цифрами реальность. Для этого нужно развить некоторую математическую интуицию.

Рассмотрим ещё одну задачу:

Задача 2. ВВП США по данным на 2008 год составил 14 триллионов международных долларов, а ВВП Турции — 1 триллион долларов. Падение ВВП за 2009 год в этих странах составил соответственно 1 и 3 %. Найти и сравнить абсолютные показатели падения ВВП за этот год в США и Турции. (Приводятся существенно округлённые данные по оценкам МВФ.)

Решение. США: 1% от 14 трлн. $= 0.01 \cdot 14 \cdot 10^{12} = 14 \cdot 10^{10} = 140$ млн

Турция: 3% от 1 трлн. = 30 млн. ■

Задачи 1 и 2 показывают, что важно не только, *сколько процентов берётся,* но и от *какого числа* берутся проценты. Обычно в задаче или в тексте статьи это не указывается непосредственно, что вызывает множество ошибок. Если говорится, что некоторая величина изменилась на какое-то количество процентов, то проценты берутся именно от этой величины.

2 Первое и второе избирательное частное

Задача 3. На выборах в Государственную думу 2011 года партия «Единая Россия» получила менее 50% голосов избирателей, однако при распределении мандатов получила большинство. Как такое могло произойти?

Для ответа на этот вопрос необходимо обратиться к закону, регламентирующему выборы в Государственную думу. Напомним, что не все участвующие в выборах партии потом участвуют в распределении мандатов: для прохождения в ГД необходимо преодолеть 7-процентный барьер (на самом деле он плавающий, но мы не будем сейчас углубляться в эти тонкости). Поэтому при распределении мандатов учитываются только соотношения между партиями, которые этот барьер преодолели. Иными словами, при распределении мандатов используется не процент, набранный при голосовании всех избирателей, а процент от числа избирателей, проголосовавших за партии, преодолевшие 7-процентный барьер. На выборах 2011 года результаты выглядели следующим образом:

Партия	**процент от общего числа избирателей**	**процент от мандатов в ГД**
Единая Россия	49,32%	52,79%
КПРФ	19,19%	20,54%
Справедливая Россия	13,24%	14,17%
ЛДПР	11,67%	12,49%
Яблоко	3,43%	—
Патриоты России	0,97%	—
Правое дело	0,60%	—

Таким образом, получается, что партия «Единая Россия» сумела набрать более половины голосов, от тех, которые учитываются при распределении мандатов. В законе для этого есть специальное понятие - первое избирательное частное. Это количество избирателей проголосовавших за партии, которые пересекли барьер, в рассчёте на одно место в парламенте. Указанная особенность избирательной системы (она есть во многих странах, далеко не только в России) даёт возможность для сильных и богатых партий выставлять себе формальных конкурентов, чем-то схожих с оппонентами, но не набирающих серьёзных результатов. Эти партии уменьшают первое избирательное частное и тем самым повышают получаемый сильной партией процент. Для таких партий введён термин «партия—спойлер».

Помимо первого избирательного частного, оказывается, есть и второе избирательное частное: количество избирателей, проголосовавших за партию в пересчёте на места, остающиеся на региональную часть партийного списка (сначала распределяются мандаты по федеральному списку). В этом случае для увеличения присутствия в парламенте, регионам необходимо максимально увеличить количество проголосовавших за партию избирателей, есть регионы с большой явкой и высоким процентом голосов за партию имеют больше шансов получить представительство в Государственной думе. При этом необходимо учитывать, что малонаселённым регионам трудно соревноваться с крупными по численности населения и для этого в законе есть возможность подавать список не от одного региона, а сразу от нескольких.

3 Увеличить и уменьшить на сколько-то процентов

Задача 4. Цена нефти в октябре выросла на 20%, а за ноябрь упала на 20%. Как изменилась цена нефти за октябрь и ноябрь вместе?

Решение. Пусть перед летом цена нефти составляла V денег за литр. Тогда прибавление в цене за лето составило $\frac{V}{100} \cdot 20\% = 0,2V$. Значит, после лета цена нефти составила $V + 0,2V = 1,2V$. Падение цены за осень составило $\frac{1,2V}{100} \cdot 20\% = 0,24V$. Значит, цена нефти после осени составляет $1,2V - 0,24V = 0,96V$, а не V , как можно было бы ожидать! ■

Дело здесь в том, что 20% берутся от разных чисел: в первом случае от сентябрьской цены, а во втором - от октябрьской, которая больше.

Это очень важный пример. Разберёмся в происходящем подробнее.

Что значит увеличение числа A на b процентов?

1% числа $A = \frac{A}{100}$

Значит, b% числа $A = \frac{A}{100} \cdot b = \frac{Ab}{100} = A \cdot \frac{b}{100}$

Таким образом, при увеличении числа A на b процентов мы получаем

$$A + A \cdot \frac{b}{100} = A\left(1 + \frac{b}{100}\right).$$

Заметим, что хоть и говорится «увеличение на», но имеется в виду именно умножение на число $\left(1 + \frac{b}{100}\right)$, т. е. увеличение в $\left(1 + \frac{b}{100}\right)$ раз.

Пример: что-то было 70, за год увеличилось на 10%. Сколько теперь?

$$G = 70 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 70 \cdot 1,1 = 77.$$

Что значит уменьшение числа A на b процентов?

$b\%$ числа $A = A \cdot \dfrac{b}{100}$

Таким образом, при уменьшении числа A на b процентов мы получаем

$$A - A \cdot \frac{b}{100} = A\left(1 - \frac{b}{100}\right).$$

Пример: что-то было 120, за месяц уменьшилось на 20%. Сколько теперь?

$$G = 120 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 120 \cdot 0,8 = 96$$

Вернёмся к задаче про нефть

Первое изменение цены - умножение на $1,2$, второе - умножение на $0,8$. Новая цена $A \cdot 1,2 \cdot 0,8 = 0,96 \cdot A$

Контрольный вопрос. Какой будет ответ в задаче про нефть, если изменить порядок операций: сначала цену уменьшить на 20%, а потом увеличить на те же 20%?

Обратные задачи Раньше мы решали задачи такого типа «было известное число, его изменили на сколько-то процентов (уменьшили на 20%, увеличили на 30%), спрашивается, какое число получилось? Давайте теперь решим такую задачу:

Задача 5. В результате неурожая, цены на гречку поднялись на 20%. Килограмм гречки стал стоить 120 рублей. Сколько стоил килограмм гречки до подорожания?

В этой задаче нам известен результат изменения какого-то числа, и нужно восстановить само это число. Она имеет несколько различных решений. Многие из них неправильные. Например, следующее рассуждение очень популярно, но совершенно неверно: 120 руб. $-$ 20% от 120 руб. $=$ 120 руб. $- \frac{20}{100} \cdot 120$ руб. $=$ 96 руб.

Действительно, проверим наш «ответ». Если килограмм гречки до подорожания стоил 96 рублей, то после подорожания он стал стоить на 20% больше, т.е. $96 + \frac{20}{100} \cdot 96 = 115.2$, а не 120 рублей, как заявлено в условии. Не сходится.

Причина этого проста: мы берём 20% не от того числа — не от исходного, а от результата, что неверно.

Правильный способ решения, например, такой. Если цена поднялась на 20%, то она стала составлять 120% от исходной. Значит, исходная цена в $\frac{120}{100} = 1.2$ раз меньше, чем 120 рублей. Таким образом, исходная цена равна $\frac{120}{1.2} = 100$ рублей.

Можно чуть иначе записать решение. Пусть исходная цена — x рублей. Тогда после подорожания она увеличится на 20% от x, т.е. станет равна $x + \frac{20}{100}x = 1.2x$ руб. Мы знаем, что это число равно 120. Имеем уравнение:

$$1.2x = 120. \tag{1}$$

Разделив левую и правую части на 1.2, имеем: $x = 100$.

Контрольный вопрос: Товар со скидкой 30% стоит 70 рублей. Сколько стоит товар без скидки?

4 Процентные пункты

Многие проблемы, связанные с процентами, носят не столько математический, сколько «лингвистический» характер. Так, мы уже обсуждали выше, что увеличение или уменьшение «на» сколько-то процентов на самом деле означает умножение на некоторое число, то есть увеличение или уменьшение «во» сколько-то раз.

Имеется ещё одна проблема лингвистического толка — она связана со сравнением величин, выраженных в процентах.

Замечание 1. *Если у агента A есть* 15 *яблок, а у агента B есть* 45 *яблок, то мы говорим, что у агента B на* 30 *яблок больше, чем у агента A. Здесь нет никакой сложности. Иногда бывает нужно сравнить две величины, составляющие некоторое количество процентов от общего. Скажем, агент A обладает* 15% *пакета акций некоторого предприятия, а агент B обладает* 45% *акций того же предприятия. Если мы скажем, что у агента B пакет акций на* 30% *, чем у агента A, то это можно прочесть так: у агента B* $15 \times \left(1+\frac{30}{100}\right)$ % *акций. Но мы имели в виду совершенно не другое! В таких случаях говорят, что у агента B на* 30 *процентных пунктов больше, чем у A. Т.е. сравнивая проценты от одного и того же числа, мы говорим, что величина больше или меньше на сколько-то процентных пунктов.*

5 «Сложные» и «простые» проценты

Задача 6. Некто в 1930 году положил в банк \$200 под 10% годовых. В 2010 году (ровно через 80 лет) Некто решил забрать свой вклад. Сколько он получит в случае:

а) Если проценты начисляются только на саму сумму вклада? (это называется простые проценты)

б) Если проценты начисляются на всю имеющуюся сумму, с учётом набежавших процентов? (это называется сложные проценты)

Решение.

а) Ежегодно начисляемая сумма составляет 10% от \$200, т.е. $\dfrac{10}{100} \times \$200 = \$20$. Значит, за 80 прошедших лет набежало $\$20 \times 80 = \$1600$. Добавляем исходные \$200 , общая сумма составит \$1800

б) Прежде чем вычислить ответ в этой задаче, посмотрим, какова будет разница в сумме вкладов за первые годы. При первом начислении процентов никакой разницы нет, при обеих схемах начислится \$20. При повторном начислении в случае б) добавится 10% от \$20, т.е. $\dfrac{10}{100} \times \$20 = \$2$ — очень мало, даже если сделать эту добавку 80 раз.

Так сколько же денег будет на счёту через 80 лет при этой схеме начисления процентов? Очевидно, что больше \$1800, но, как кажется на первый взгляд, не намного. Сколько же? \$2000? Или, может быть, \$5000? Или даже \$10000?

Чтобы вычислить ответ, давайте посмотрим на эту задачу с другой стороны. Ежегодно размер вклада увеличивается на 10% , т.е. умножается на $\left(1+\dfrac{10}{100}\right) = 1.1$. Прошло 80 лет, значит, увеличение происходило 80 раз, и в 2010 году вклад составит: $200 \times 1.1^{80} \approx 409680$. Больше, чем *четыреста тысяч* долларов! Интуиция нас опять обманула — результат превзошёл даже самые смелые ожидания. ■

год	**простые проценты**	**сложные проценты**
1930	\$100	\$200
1931	$\$200+0.1\times\$200=\$220$	$\$200+0.1\times\$200=\$200\times1.1=\$220$
1932	$\$220+0.1\times\$200=\$240$	$\$220\times1.1=\$200\times1.1\times1.1=\$200\times1.1^2=\$242$
1932	$\$240+0.1\times\$200=\$260$	$\$220\times1.1^3=\$266.2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2010	$\$200+80\times0.1\times\$200=\$1800$	$\$100\times1.1^{80}\approx\$409680$

Таблица 1: Сложные и простые проценты: количество денег на счету по годам