

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s20/h>)
Семинар 16. Подкова Смейла (14 мая)

И. Щуров, Н. Солодовников

Определение 1. Рассмотрим замкнутый квадрат $X = [0, 1]^2$ и следующие замкнутые полосы: вертикальные $\Pi'_0 = [1/5, 2/5] \times [0, 1]$ и $\Pi'_1 = [3/5, 4/5] \times [0, 1]$ и горизонтальные $\Pi_0 = [0, 1] \times [1/5, 2/5]$ и $\Pi_1 = [0, 1] \times [3/5, 4/5]$. Определим отображение $S: \Pi_0 \cup \Pi_1 \rightarrow X$ следующим образом: каждая из горизонтальных полос Π_0, Π_1 сжимается в пять раз по горизонтали, растягивается в пять раз по вертикали и параллельным переносом накладывается на соответствующую вертикальную полосу: Π_0 на Π'_0 и Π_1 на Π'_1 . В точках квадрата, не лежащих в Π_0 или Π_1 , отображение S не определено.

Отображение S называется отображением *подковы Смейла*.

Замечание 1. Строго говоря, у Смейла было другое отображение: оно было определено на всём квадрате и действовало так: квадрат сжимался по горизонтали, растягивался по вертикали, потом сгибался в виде подковы и эта подкова накладывалась на себя. Ограничение этого отображения на $\Pi_0 \cup \Pi_1$ отличается от нашего в том, что Π_1 дополнительно переворачивается. Это создаёт некоторую дополнительную трудность при вычислениях, и поэтому мы рассматриваем отображение, заданное выше.

Задача 1. Записать отображение подковы явно с помощью формул.

Задача 2. Записать явно обратное отображение: S^{-1} . Где оно определено?

Определение 2. Для всякого инъективного отображения f определим его композиционную степень для целого n следующим образом: f^0 — это тождественное отображение; если $n > 0$, то $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ и если $n < 0$, то $f^n = (f^{-1})^{-n}$. Иными словами, n показывает, сколько раз надо применить отображение, если оно отрицательно — надо применять обратное отображение. Композиционная степень отображения f может быть определена не на всей области определения f .

Задача 3. Постройте явно множества, на которых определено

- (a) S^2 (b) S^3 (c) S^4 (d) S^{-2}

Задача 4. Будем записывать координаты (x, y) точки из квадрата в пятеричной системе счисления. Как ответы к предыдущей задаче проще переформулировать в терминах такой записи? Как записать действие S в этих терминах?

Задача 5. Опишите множества точек x , для которых определено $S^n(x)$ для всех

- (a) натуральных n ; (b) целых отрицательных n ; (c) любых целых n .

Определение 3. Обозначим множество, на котором определено S^n для всех $n \in \mathbb{Z}$, через Λ .

Задача 6. Много ли точек в Λ ? Они там вообще есть? Их конечное число или бесконечно много? Больше, чем натуральных чисел (в смысле мощности множеств)? Какую площадь занимает Λ ?

Задача 7. Найти неподвижные точки S .

Задача 8. Найти все периодические точки S всевозможных периодов. Много их или мало?

Задача 9. Пусть известно, что точки P и Q принадлежат Λ и число $m \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\frac{1}{5^{m+1}} < |y(P) - y(Q)| \leq \frac{1}{5^m}.$$

(В частности, расстояние между P и Q может быть маленьким, но не меньше, чем $1/5^{m+1}$.) Найти такое n , что расстояние между $S^n(P)$ и $S^n(Q)$ не меньше $1/7$. Как быстро происходит «разбегание» близких точек?