Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s20/h)
Семинар 15. Теорема Пуанкаре — Бендиксона и отображение Пуанкаре (30 апреля)
И. Щуров, Н. Солодовников

Теорема 1. *Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение*

$$\dot{x} = v(x), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим решение с начальным условием $x(0) = x_0$ через $x(t; x_0)$. Если v достаточно гладкое (то есть имеет непрерывные производные достаточно высоких порядков), то функция $x(t; x_0)$ гладко зависит от x_0.

Определение 1. Рассмотрим автономное уравнение $\dot{x} = v(x)$. ω-предельным множеством точки p называется множество предельных точек положительной полутраектории точки p, то есть множество точек, к которым траектория приближается сколь угодно близко в сколь угодно далёком будущем:

$$\omega(p) := \{\, q \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{\, t_k \,\},\ t_k \to +\infty,\ x(t_k, p) \to q \,\}.$$

Задача 1. Докажите, что если какая-то точка q лежит в $\omega(p)$, то и вся траектоия точки q лежит в $\omega(p)$.

Задача 2. Докажите, что ω-предельное множество замкнуто, то есть содержит все свои предельные точки.

Задача 3. Верно ли, что для любой точки $y \in \omega(x)$, $\omega(y) = \omega(x)$?

Задача 4. Докажите, что если $y \in \omega(x)$, то $\omega(y) \subset \omega(x)$.

Задача 5. Привести пример фазового портрета дифференциального уравнения на плоскости, у которого ω-предельное множество некоторой точки не является точкой или топологической топологической окружностью. (Топологическая окружность — это множество, превращающееся в окружность некоторым гомеоморфизмом, то есть отображением, непрерывным вместе со своим обратным. Например, квадрат $|x| + |y| = 1$ является топологической окружностью, а «квадрат с диагональю» ⧄ — не является.)

Задача 6. Теорема Жордана говорит, что простая кривая без самопересечений разбивает плоскость на две компоненты связности и является их общей границей. В частности, из одной компоненты связности нельзя попасть в другую, двигаясь непрерывно и не пересекая границу. Верна ли теорема Жордана для

(a) сферы; (b) цилиндра; (c) тора; (d) листа Мёбиуса?

(Достаточно иллюстраций.)

Определение 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$ и такой отрезок Γ (быть может, криволинейный, но гладкий) на плоскости $\mathbb{R}^2$, что векторы векторного поля v не касаются этого отрезка ни в какой точке. (Такой отрезок назвывается *трансверсалью к векторному полю.*) Рассмотрим отображение

$$P\colon \Gamma \to \Gamma,$$

заданное следующим образом. Для всякой точки $q \in \Gamma$, выпустим траекторию из q. Если эта траектория когда-либо в будущем (то есть при $t > 0$) пересекает Γ, положим $P(q)$ равным первой такой точке пересечения. Если эта траектория не определена, значит, $P(q)$ не определено. Отображение P называется *отображением Пуанкаре* или *отображением первого возвращения.*

Задача 7. Найти отображение Пуанкаре для предельного цикла системы

$$\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

с отрезка $I = (x, 0) \mid x \in [1/2, 3/2]$ на себя. Указание: перейти в полярные координаты или в координаты (ρ, φ), где $\rho = r^2$.

Задача 8. Ориентируем отрезок Γ, то есть поставим на нём стрелочку как угодно. Будем считать, что эта стрелочка направлена «вправо». Докажите, что если $P(q)$ правее q, то $P(P(q))$ правее $P(q)$.

Задача 9. Пусть отображение Пуанкаре имеет неподвижную точку: $P(q) = q$. Что вы можете сказать про траекторию точки q?

Задача 10. Пусть отображение Пуанкаре имеет неподвижную точку q и при этом $P'(q) < 1$. Что вы можете сказать про траекторию точки q?