Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s20/h)
Семинар 14. Линейные системы и уравнения высших порядков (23 апреля)
И. Щуров, Н. Солодовников

Задача 1. Постройте полиномиальное векторное поле, имеющее

(a) два предельных цикла;
(b) n предельных циклов.

Определение 1. Квазимногочлен — это конечная сумма функций вида $P(t)e^{\lambda t}$, где $P(t)$ — многочлен (быть может, с комплексными коэффициентами), λ — константа (быть может, комплексная). Степенью квазимногочлена называется максимальная из степеней многочленов $P(t)$, входящих в его конструкцию.

Задача 2. Покажите, что функция $f(t) = e^{2t}\sin \pi t + \cos 2t - t^2 + t^3 \sin t$ — квазимногочлен. Найдите его степень.

Задача 3. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор D_λ, действующий на гладких функциях следующим образом:

$$(D_\lambda f)(t) = \frac{d}{dt}f(t) - \lambda f(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) f(t)$$

(a) Найти $D_\lambda(t^n e^{\mu t})$, где n — некоторое фиксированное натуральное число, μ — некоторое фиксированное (вообще говоря, комплексное) число.
(b) Доказать, что пространство всех квазимногочленов инвариантно под действием D_λ (то есть образ квазимногочлена есть квазимногочлен).
(c) Пусть $f(t) = P(t)e^{\mu t}$ — квазимногочлен степени n. Что можно сказать про степень $D_\lambda f$ в зависимости от значений λ и μ? Может ли степень увеличиться? Уменьшиться?
(d) Рассмотрим уравнение $D_2 x = 0$ относительно неизвестной функции $x(t)$. Найдите все его решения.
(e) Рассмотрим уравнение $D_2 x = e^{3t}$. Будем искать его частное решение в виде квазимногочлена вида $P(t)e^{3t}$. Какой максимальной степени можно выбрать многочлен $P(t)$? Записать этот многочлен в общем виде, подставить в уравнение и найти, чему равны его коэффициенты (метод неопределенных коэффициентов). Записать общее решение этого уравнения (напоминание: общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного).
(f) Выполнить предыдущий пункт для уравнения $D_2 x = e^{2t}$. Что принципиально изменилось?
(g) Найти все решения уравнения $\dot{x} - x = te^t + e^{2t}$.

Задача 4. Рассмотрим оператор $D = D_2 \circ D_3 = (\frac{d}{dt} - 2)(\frac{d}{dt} - 3)$.

(a) Найти $Df(t)$.
(b) Найти $D(t^n e^{\nu t})$. Какова степень получающегося квазимногочлена в зависимости от значения ν? (Подсказка: проще всего подействовать сначала одним оператором композиции, затем другим.)
(c) При каких μ функция $x(t) = e^{\mu t}$ является решением уравнения $Dx = 0$?
(d) Найти частное решение уравнения $Dx = e^t$. Найти его общее решение. Подсказка: действовать по аналогии с пунктом 3e предыдущей задачи.
(e) Выполнить предыдущий пункт для уравнения $Dx = e^{2t}$. Что изменилось?
(f) Найти все решения уравнения $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^t + e^{2t} + e^{3t}$.

Задача 5. Рассмотрим оператор $D = D_i \circ D_{-i} = (\frac{d}{dt} - i)(\frac{d}{dt} + i)$.

(a) Найти $Df(t)$.
(b) Найти $D(t^n \sin \nu t)$ и $D(t^n \cos \nu t)$. Какова степень получающегося квазимногочлена в зависимости от значения ν?

(c) При каких μ функция $x(t) = e^{\mu t}$ является решением уравнения $Dx = 0$?
(d) При каких μ функция $x(t) = \sin(\mu t)$ является решением уравнения $Dx = 0$?
(e) Найти частное решение уравнения $Dx = \sin 2t$. Найти его общее решение. Подсказка: действовать по аналогии с пунктом 3e предыдущей задачи. Искать решение в виде квазимногочлена вида $P(t)\sin 2t + Q(t)\cos 2t$.
(f) Выполнить предыдущий пункт для уравнения $Dx = \sin t$. Что изменилось?

Задача 6. Рассмотрим осциллятор с периодическим внешним возмущением (элементарную модель качелей):

$$\ddot{x} = x + \sin \omega t.$$

При каком значении параметра $\omega \in \mathbb{R}$ у системы существуют неограниченные решения? Какому физическому явлению это соответствует?