

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**  
**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s20/h>)  
**Семинар 12. Устойчивость (9.04)**

*И. Щуров, Н. Солодовников*

**Задача 1.** [1] Исследовать устойчивость положений равновесия следующих уравнений и систем: определить, являются ли они устойчивыми по Ляпунову, асимптотически устойчивыми?

(a)  $\dot{x} = 0.$

(b)  $\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = y.$

(c)  $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$

(d)  $\dot{x} = x^2 \quad \dot{y} = -y.$

(e) 
$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

(f) 
$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

**Задача 2.** Рассмотрим дифференциальное уравнение, в полярных координатах задающееся следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \sin(\varphi) + 1, \quad \dot{r} = r(1 - r).$$

(a) Построить фазовый портрет в координатах  $(r, \varphi)$  и  $(x, y)$ .

(b) Что можно сказать о поведении решений при  $t \rightarrow +\infty$ ?

(c) Является ли положение равновесия  $(r = 1, \varphi = -\pi/2)$  асимптотически устойчивым?

(d) Устойчивым по Ляпунову?

**Задача 3.** [2] Используя теорему об устойчивости по первому приближению, исследовать, при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  асимптотически устойчиво нулевое решение. При каких оно является неустойчивым по Ляпунову? При каких теорема не даёт ответ на вопрос об устойчивости?

(a) 
$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2 \\ \dot{y} = x + y + xy \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x \\ \dot{y} = ax + by \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + 2y \\ \dot{y} = -5x - 3y \end{cases}$$

**Задача 4.** Известно, что существует решение  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  дифференциального уравнения  $\dot{x} = v(x)$ , такое что  $x(0) \neq 0$  и  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$ . Что можно сказать об устойчивости положения равновесия  $x = 0$ ?

**Задача 5.** Рассмотрим систему, зависящую от параметра  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\varepsilon x - 10\varepsilon y + 4y^3 \\ \dot{y} = 4\varepsilon x + 10\varepsilon y - 6x^5 \end{cases}$$

При каких значениях  $\varepsilon$  особая точка  $(0, 0)$  является асимптотически устойчивой? Устойчивой по Ляпунову? Не является устойчивой? Исследовать все возможные значения  $\varepsilon$  (в том числе те, при которых теорема об устойчивости по первому приближению не даёт ответа).

## Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.  
 [2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.