Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s20/h)
Семинар 13. Линейные системы и нелинейные особые точки (23.04)
И. Щуров, Н. Солодовников

Задача 1. Пусть A — квадратная матрица. Докажите, что для любой невырожденной матрицы C подходящего размера,

$$e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^{A}C.$$

Это означает, что если $\mathcal{A}$ — линейный оператор, задаваемый в исходном базисе матрицей A, то результаты следующих действий совпадают: 1. перейти в новый базис, посчитать экспоненту от получившейся матрицы; 2. посчитать экспоненту от матрицы A, затем перейти в новый базис. Таким образом, экспонента — это функция, корректно заданная на операторах, а не просто на матрицах. (Приведите пример функции от матрицы, которая не обладает таким свойством.)

Задача 2. Найти e^A для

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 3. Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^6$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Найти вещественное решение этой системы с произвольным вещественным начальным условием $z(0) = z^0$.
(b) Найти все начальные условия, при которых $z(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Задача 4. Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^4$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все её решения.

Задача 5. Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Найти все её решения. Как выглядят фазовые траектории? Придумайте название для такой особой точки.

Задача 6. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = y - (x^2 + y^2)x, \quad \dot{y} = -x - (x^2 + y^2)y.$$

(a) Найти её линеаризацию и построить фазовый портрет линеаризации.
(b) Перейти в полярные координаты, найти решение исходной системы в полярных координатах.

(c) Построить фазовый портрет исходной системы. Сравнить с фазовым портретом линеаризации. Какие свойства у них общие, а какие различны?

Задача 7. [2] Исследовать особые точки следующих систем. Найти линеаризацию системы в каждой особой точке, определить тип особой точки. Нарисовать примерно вид фазовых портретов вблизи каждой особой точки.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$

(d) (*) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$

Список литературы

[1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

[2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.