Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s20/h)
Семинар 11. Линейные системы (27.03)
И. Щуров, Н. Солодовников

Задача 1. Для следующих систем найти решение задачи Коши $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, построить фазовый портрет и определить тип особой точки. Исследовать поведение решений при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3y \\ \dot{y} = 6x + 5y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 9y \\ \dot{y} = 6x - 8y \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \dot{x} = -9x - 12y + 6 \\ \dot{y} = 8x + 11y - 5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 21y \\ \dot{y} = 2x - 6y \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$

Задача 2. Рассмотрим систему
$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 2y.$$

(a) Решить уравнение на y.
(b) Подставить полученное решение в уравнение на x. Решить получающееся уравнение на x.
(c) Записать решение задачи Коши с начальным условием $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ в виде
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$
где $M(t)$ — некоторая матрица.
(d) Построить фазовый портрет. Найти изоклины с вертикальными и горизонтальными касательными. Исследовать касание фазовых кривых и координатных осей при $t \to -\infty$.

Задача 3. Определить тип особой точки в зависимости от значения параметра $s \in \mathbb{R}$. При каких значениях параметра у системы есть непрерывный первый интеграл, определённый в окрестности начала координат?
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 3x + sy \end{cases}$$

Задача 4. Записать решение задачи Коши с начальным условием $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ для системы
$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -2y, \quad \dot{z} = 3z$$
в виде
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$
где $M(t)$ — некоторая матрица. Нарисовать фазовый портрет.

Задача 5. На лекции рассматривались уравнения на плоскости вида $\dot{x} = Ax$, где матрица A невырождена и имеет вещественные собственные значения. Что будет, если матрица A вырождена? Какие различные случаи здесь нужно рассмотреть? Как будет выглядеть фазовый портрет системы для каждого из этих случаев?

Задача 6. Для следующих систем осуществить переход к полярным координатам, то есть записать уравнения для новых координат φ и r, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Построить фазовые портреты в новых и старых координатах.

(a) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x;$

(b) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x;$

(c) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y;$

(d) $\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y;$

(e) $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y;$

(f) (*) $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2); \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$

Список литературы

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.