Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s20/h)
Семинар 9. Линейные уравнения. Разное (5.03.2021)
И. Щуров, Н. Солодовников

Линейные уравнения

Задача 1. С помощью метода вариации постоянных решите следующие уравнения:

(a) $y = x(y' - x\cos x)$;
(b) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;
(c) $2x(x^2+y)dx = dy$;
(d) $(x+y^2)dy = ydx$;
(e) $(2e^y - x)y' = 1$;
(f) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

Задача 2. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два каких-то различных решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Выразить через них решение того же уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ для произвольных t_0, x_0.

Задача 3. Найти все решения уравнения, представляющиеся в виде $x(t) = Ce^{\lambda t}$. Найти все решения уравнения.

(a) $\ddot{x} - 4x = 0$;
(b) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$;
(c) $\ddot{x} + 4x = 0$;

Задача 4. [1] Рассмотрим уравнение $\dot{x} + x = f(t)$, где $|f(t)| \leq M$ при всех $t \in \mathbb{R}$.
(a) Показать, что это уравнение имеет ровно одно решение, ограниченное при всех t.
(b) Найти это решение.
(c) Показать, что найденное решение периодическое, если функция $f(t)$ периодическая.

Задача 5. [1] Рассмотрим уравнение

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad x > -1/2$$

(a) Какова размерность пространства решений этого уравнения?
(b) Угадать два каких-нибудь решения этого уравнения. (Подсказка: Поищите решения в виде многочленов или $e^{\lambda x}$.)
(c) Найти все решения этого уравнения.

Разное

Задача 6. Для следующих систем найти какой-нибудь глобальный непостоянный непрерывный первый интеграл, либо доказать, что его не существует.
(a) $\dot{x} = \sin(x+y), \quad \dot{y} = \cos(x+y+z), \quad \dot{z} = 0$;
(b) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \sin(x^2+y^2+z^2)$;
(c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = -3z$;
(d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y, \quad \dot{z} = 3z$.

Задача 7. Найти все значения параметра α, при которых система

$$\dot{x} = 5x \quad \dot{y} = \alpha y$$

имеет всюду определённый непрерывнй первый интеграл.

Задача 8. Для следующих систем осуществить переход к полярным координатам, то есть записать уравнения для новых координат φ и r, где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Построить фазовые портреты в новых и старых координатах.

(a) $\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x;$

(b) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x;$

(c) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y;$

(d) $\dot{x} = -x - y, \quad \dot{y} = x - y;$

(e) $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = -x + y;$

(f) (*) $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2); \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$

Задача 9. Найти все значения параметра s, при которых система

$$\dot{x} = 5y, \quad \dot{y} = sx$$

имеет непостоянные периодические решения. Для каждого из этих значений s записать уравнение фазовых кривых, соответствующих периодическим решениям.

Задача 10. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы

$$\dot{x} = 6x^4, \quad \dot{y} = -7y \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = 1$, $y(0) = 6$. Найти $\inf_t y(t)$ и $\sup_t y(t)$, где инфимум и супремум берутся по всем t, при которых решение определено.

Задача 11. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 5xz, \quad \dot{y} = -6y, \quad \dot{z} = 0.$$

Найти все начальные условия, при которых решение имеет конечный предел при $t \to +\infty$.

Список литературы

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.