Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s20/h)
Семинар 5. Автономные и неавтономные уравнения, дифференциальные формы, уравнения в полных дифференциалах (12.02.2021)
И. Щуров, Н. Солодовников

Задача 1. Рассмотрим *модель Лотки—Вольтерра*, описывающую динамику популяции хищников (y) и их жертв (x):

$$\dot{x} = kx - axy, \quad \dot{y} = -ly + bxy. \tag{1}$$

Здесь a, b, k, l — положительные параметры, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(a) Найти все особые точки векторного поля, соответствующего уравнению (1).
(b) Нарисовать векторное поле (1).
(c) Нарисовать эскиз фазовых кривых. Проинтерпретировать их вид в терминах исходной модели.
(d) Записать неавтономное дифференциальное уравнение, интегральные кривые которого совпадают с фазовыми кривыми системы (1).
(e) Решить полученное уравнение.
(f) Нарисовать фазовые кривые системы (1).
(g) Проинтерпретировать полученные результаты в терминах исходной модели.

Определение 1. *Дифференциальной 1-формой* называется функция $\omega\colon U \times V_n \to \mathbb{R}$ от двух аргументов: точки P из области U в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ и вектора v из n-мерного линейного пространства V_n. Функция ω должна быть линейной по второму аргументу.

Другой способ думать о дифференциальной 1-форме: это *ковекторное поле*, то есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке $P \in U \subset \mathbb{R}^n$ некоторый линейный функционал на векторном пространстве V_n.

Задача 2. Пусть $P = (x, y) \in \mathbb{R}^n$ и $v = (v_x, v_y) \in V_2$. Какие из следующих функций являются 1-формами?

(a) $\omega(P, v) = x + y$;
(b) $\omega(P, v) = v_x$;
(c) $\omega(P, v) = v_x + v_y + 1$;
(d) $\omega(P, v) = xyv_x$;
(e) $\omega(P, v) = x^2 v_x + y^2 v_y$;
(f) $\omega(P, v) = xv_x v_y$.

Замечание 1. *Множество ковекторов образует линейное пространство. В качестве его базиса можно выбрать «координатные функционалы». Например, для вектора $v = (v_x, v_y) \in V_2$ можно определить функционалы $dx(v) = v_x$ и $dy(v) = v_y$. Они являются базисом в пространстве линейных функционалов на двумерном векторном пространстве. Теперь 1-форму*

$$\omega(P, v) = x^2 v_x + y^2 v_y$$

можно записать в виде

$$\omega(x, y) = x^2 dx + y^2 dy$$

Замечание 2. *С дифференциальным уравнением вида $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ можно связать дифференциальную форму*

$$\omega = f(x, y)dx - g(x, y)dy,$$

где $dx(v) = v_x$, $dy(v) = v_y$ — соответствующие базисные функционалы.

Задача 3. Найти форму, соответствующую уравнению, и построить её поле направлений. Сравнить с полем направлений для исходного уравнения.

(a) $y' = y$;
(b) $y' = y/x$;
(c) $y' = -y/x$;
(d) $y' = -x/y$.

Определение 2. *Дифференциалом* функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется дифференциальная 1-форма df, обладающая следующим свойством: для любой точки x из области определения f и любого вектора v с маленькой нормой справедливо соотношение

$$f(x+v) = f(x) + df(x)(v) + o(\|v\|).$$

Задача 4. Для следующих функций f найти их дифференциалы и найти поля направлений для уравнения $df = 0$. Построить несколько линий уровня функции f.

(a) $f(x,y) = x$;
(b) $f(x,y) = 2x + 3y$;
(c) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$;
(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
(e) $f(x,y) = xy$;
(f) $f(x,y) = x - \sin y$;
(g) $f(x,y) = x^2y^2$;
(h) (*) $f(x,y) = y^2/2 + \sin x$.

Определение 3. Уравнение

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция $H(x,y)$, что левая часть уравнения (2) является полным дифференциалом $dH(x,y)$, то есть $F(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$ и $G(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$.

Замечание 3. *Интегральными кривыми уравнения* (2) *являются линии уровня функции* H.

Теорема 1. *Уравнение* (2) *является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда* $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$.

Задача 5. (*) Докажите теорему 1.

Замечание 4. *Если выполняется условие теоремы 1, функцию H можно найти следующим образом: проинтегрировать функцию F по x, полагая y фиксированным; при этом константа интегрирования будет зависеть от y, и её можно будет найти, подставив результат интегрирования в уравнение* $\frac{\partial H}{\partial y} = G$.

Задача 6. Найти выражение, задающее интегральные кривые следующих уравнений:

(a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$;
(b) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$;
(c) $\dot{x} = \dfrac{t(9tx^2 - 2)}{x(4x^2 - 6t^3)}$;
(d) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.