Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s20/h)
Семинар 1. Основные понятия (15.01)

И. Щуров, Н. Солодовников

Задача 1. Для каждого уравнения построить его поле направлений. Пользуясь полем направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Угадать общее решение, построить «настоящие» интегральные кривые и сравнить с эскизом.

(a) $\dot{x} = 0$;
(b) $\dot{x} = -1$;
(c) $\dot{x} = 2t$;
(d) $\dot{x} = \frac{x}{t}$;
(e) $\dot{x} = -\frac{x}{t}$;
(f) $\dot{x} = -\frac{t}{x}$;
(g) (*) $\dot{x} = \frac{2x}{t}$.

Задача 2. [1, 2] Предположим, что величина биологической популяции (например, число рыб в пруду) в момент времени t равна $x(t)$ и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.) Тогда функция $x(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0.$$

(a) Нарисовать поле направлений для этого дифференциального уравнения. Как оно будет меняться в зависимости от k?
(b) Нарисовать эскизы интегральных кривых (графиков решения в расширенном фазовом пространстве). Как будет зависеть вид интегральных кривых от параметра?
(c) Существуют ли решения уравнения, являющиеся постоянными?
(d) Угадать решение: найти зависимость $x(t)$ явно и проверить, что она удовлетворяет уравнению.
(e) Пусть в начальный момент времени $t = 0$ размер популяции равен x_0. Найти решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

Задача 3. [3] Согласно модели Солоу, скорость роста капиталовооруженности экономики k удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{k} = sf(k) - \delta k, \tag{1}$$

где $k = k(t)$ — капиталовооружённость в момент времени t, $f(k)$ — функция производства.

Полагая $f(k) = \sqrt{k}$, решить для получившегося уравнения все пункты задачи 2, кроме 2d и 2e.

Задача 4. [2] Предположим, что мы находимся в условиях задачи 2, но из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводящаяся за единицу времени) не является постоянным, а зависит от x как линейная функция: $a - bx$. (С ростом x всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно ресурсов, чтобы продолжить род.) Записать дифференциальное уравнение, описывающее данную модель. Решить для неё все пункты задачи 2, кроме 2d и 2e. Что вы можете сказать о постоянных решениях получающегося уравнения? Что вы можете сказать о решениях с начальными условиями, близкими к этим постоянным решениям?

Задача 5. Решая уравнение $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$ методом Эйлера и, устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа e.

Список литературы

[1] Malthus *An Essay on the Principle of Population.* London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798

[2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

[3] Solow, Robert W., *A Contribution to the Theory of Economic Growth* Quarterly Journal of Economics, February 1956, pp. 65-94.