

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 29 (18 декабря 2019)***И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*

Знаком ($\hat{\square}$) отмечены задачи или пункты для самостоятельного решения. Их не планируется обсуждать на семинаре, но они могут быть включены в самостоятельную работу наравне с остальными задачами. (На самом деле, нет, это последний семинар.)

Задача 1. Найти значение выражения

(a) $(2 + 3i)(3 - 2i)$; (b) $(1 + 2i)^3$; (c) $1/i$; (d) $1/(1 + i)$.

Задача 2. Записать в виде $z = re^{i\varphi}$ комплексное число

(a) 1 (b) -1 (c) $2i$; (d) $i + 1$;

Задача 3. Корнем степени n из комплексного числа z называется такое комплексное число w , что $w^n = z$. Найти все корни пятой степени из

- (a) единицы.
(b) минус единицы.

Нарисовать их на комплексной плоскости.

Задача 4. Найти сумму всех корней пятой степени из единицы.

Задача 5. Найти все решения уравнения (в комплексных числах):

$$z^3 = \bar{z}.$$

Задача 6. Докажите, что

(a) $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ (b) ($\hat{\square}$) $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Задача 7. Существует ли такое комплексное число z , что $\sin z = 3$?

Задача 8. Логарифмом комплексного числа z называется такое число w , что $e^w = z$. Докажите, что логарифм может быть записан формулой

$$\log z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где $\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа (то есть число φ в разложении $z = |z|e^{i\varphi}$). Сколько разных значений логарифма существует у ненулевого комплексного числа?