

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 28 (16 декабря 2020)***И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcendentals*.**Задача 1.** Докажите, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится, то есть если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

**Подсказка.** Рассмотрите последовательность  $b_n = a_n + |a_n|$ . Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ?**Задача 2.** Рассмотрим ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Пусть существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c.$$

Докажите, что если  $c > 1$ , то ряд расходится, а если  $c < 1$ , то сходится абсолютно. Что может быть при  $c = 1$ ?**Задача 3.** Рассмотрим ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Пусть существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c.$$

Докажите, что если  $c > 1$ , то ряд расходится, а если  $c < 1$ , то сходится абсолютно. Что может быть при  $c = 1$ ?**Задача 4.** Сходится ли ряд? Если да, найти его сумму.

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-2n + 3)$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1}$

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^n}$

(g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}$

**Задача 5.** При каких значениях  $\alpha \in \mathbb{R}$  сходится ряд

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}?$$

**Задача 6.** Найти значение  $p$ , при котором ряд сходится

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

$$(b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$$

**Задача 7.** Сходится ли ряд? Сходится ли он абсолютно?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{2^n};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 1}};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n};$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n};$$

**Задача 8.** Сходится ли ряд?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}};$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1);$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n;$$

$$(d) (*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

**Задача 9.** Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^k}$$

при всех значениях  $a > 0$ , при которых ряд сходится.

**Подсказка.** Этот ряд можно представить как бесконечную сумму геометрических прогрессий.