

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 27 (11 декабря 2020)***И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcendentals*.**Задача 1.** При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл сходится? Найти значение интеграла для всех тех значений α , для которых он сходится.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

(c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

(b) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Задача 2. Рассмотрим пределы

$$A = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-t} \frac{dx}{x} + \int_t^1 \frac{dx}{x}$$

$$B = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-t^2} \frac{dx}{x} + \int_{t^2}^1 \frac{dx}{x}$$

Покажите, что $A \neq B$.**Замечание 1.** Эта задача показывает, что интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

*действительно не определён, хоть это и интеграл от нечётной функции по симметричному отрезку. Если бы он был определён, было бы логично ожидать, что его значение равно и пределу A , и пределу B .***Задача 3.** Найти значение несобственного интеграла, если интеграл сходится.

(a) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

(f) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{|x|}}$

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{9 + x^6}$

(c) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

(h) $\int_{-3}^3 \frac{dx}{x^3 - x}$

(d) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 1}$

(i) $\int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

(e) $\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$

(j) $\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$

(k)
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

(l)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + 1)}{e^{x^2}} dx$$

Задача 4. Сходится ли интеграл?

(a)
$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

(c)
$$\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx$$

(b)
$$\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx$$

(d)
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$$

Задача 5. При каких значениях α интеграл сходится? Найти значение интеграла для тех α , при которых он сходится.

(a)
$$\int_0^1 x^{\alpha} \ln x dx$$

(b)
$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

Задача 6. Найти интеграл

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 7. Доказать равенство

(a)
$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(b)
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y} dy$$