**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**
**Математический анализ 1** (http://math-info.hse.ru/s20/3)
**Семинар 26 (9 декабря 2020)**
*И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*

Знаком (🏠) отмечены задачи или пункты для самостоятельного решения. Их не планируется обсуждать на семинаре, но они могут быть включены в самостоятельную работу наравне с остальными задачами.

Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcedentals.*

**Задача 1.** Найти интеграл $F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ для следующих функций $f$. Построить графики $f$ и $F$. В каких точках $F$ имеет изломы и почему?

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad a = 3$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \quad a = -2$

(c) (🏠) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 3 - x, & x \ge 1 \end{cases}, \quad a = 0$

**Задача 2.** Рассмотрим *функцию Римана*:

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = p/q, \quad \text{НОД}(p,q) = 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Докажите, что она интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, $b > a$.

**Задача 3.** Функция $\frac{\sin t}{t}$ не является интегрируемой в элементарных функциях, то есть её интеграл нельзя записать в виде формулы, в которую входят только функции, которые мы проходили до сих пор (степени, экспоненты, тригонометрические функции и т.д.). Рассмотрим её первообразную, заданную следующим образом:

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

(Поскольку значение изменение значения функции в конечном числе точек не влияет на значение интеграла, тот факт, что подынтегральное выражение не определено в нуле, не приводит к проблемам: можно просто доопределить его в нуле единицей по непрерывности.)

(a) Найдите все точки локальных экстремумов функции $\operatorname{Si}(x)$. (Только $x$-координаты, соответствующие значения находить не нужно.)
(b) В какой точке достигается глобальный максимум?
(c) Нарисуйте эскиз графика.
(d) Выпишете тейлоровский многочлен степени $n$ в окрестности нуля.

**Задача 4.** Найти интегралы, пользуясь различными методами

(a) $\int \cos(x)(1+\sin^2 x)\,dx$

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

(c) $\int_{1}^{3} x^4 \ln x\,dx$

(d) $\int e^{x+e^x}\,dx$

(e) $\int \frac{dt}{1+e^{-t}}$

(f) $\int \ln(x^2-1)dx$

(g) $\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x-5}dx$

(h) $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}dx$

(i) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

(j) $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$

(k) $\int (x+\sin x)^2\,dx$

(l) $\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

(m) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x+1}}$

(n) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$

(o) (*) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

**Задача 5.** (*) Пусть функция $f$ определена на отрезке $[a,b]$ и $\{c_n\}$ — возрастающая последовательность чисел, $c_n \in [a,b]$ для всех натуральных $n$. Пусть $f$ непрерывна во всех точках $[a,b]$, кроме точек последовательности $c_n$, а в последних имеет разрывы типа «скачок». Пусть также $f$ ограничена на $[a,b]$. Докажите, что она интегрируема на $[a,b]$.