

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 25 (4 декабря 2020)**

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcendentals*.**Задача 1.** Найти определенные интегралы

(a) $\int_0^2 (x-1)^{25} dx$

(d) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

(b) $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$

(e) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$

(c) $\int_0^7 \sqrt{4+3x} dx$

(f) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Задача 2. Найти интеграл с помощью интегрирования по частям и других методов

(a) $\int x^2 \sin \pi x dx$

(f) $\int_1^2 x^4(\ln x)^2 dx$

(b) $\int \ln(2x+1) dx$

(g) $\int \cos \sqrt{x} dx$

(c) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

(h) $\int x \ln(1+x) dx$

(d) $\int_0^\pi x^3 \cos x dx$

(i) $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$

(e) $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x} dx$

(j) $\int e^x \sin x dx$

Задача 3. Докажите, что для положительных a, b , верно равенство

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx.$$

Задача 4. Функция f называется *периодической*, если существует такое $T > 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$$

для любых a, b . (Иными словами, интеграл от периодической функции по периоду не зависит от выбора отрезка интегрирования.)**Задача 5.** Пусть функция f периодическая и $\int_a^{a+T} f(x) dx = 0$. Докажите, что $\int f(x) dx$ — периодическая функция.

Задача 6. (♠) Пусть функция f периодическая и интегрируемая. Докажите, что $\int f(x) dx$ представляется в виде суммы периодической и линейной функции.

Задача 7. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

- (a) Найти его значение с помощью замены $x = \sin t$.
(b) Можно ли при этой замене в качестве новых пределов интегрирования взять числа π (нижний) и $\pi/2$ (верхний). Почему?

Задача 8. Найти интеграл

(a) $\int \frac{x^2}{x+4} dx$

(b) $\int \frac{dt}{(t+4)(t-1)}$

(c) $\int_3^4 \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2} dx$

(d) $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+9)}$

(e) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

(f) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+4x+13}$