

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 24 (2 декабря 2020)**

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на учебнике *Stewart J. Calculus, Early Transcendentals*.

Определение 1. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Её *первообразной* называется такая функция F , непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) , что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Теорема 1. (*Формула Ньютона — Лейбница*) Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда

1. Пусть $G(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$. Тогда G — первообразная f .

2. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, где F — какая-нибудь первообразная f .

Задача 1. С помощью формулы Ньютона — Лейбница найти следующие интегралы, если они существуют.

(a) $\int_0^1 (2x + 4x^3) dx;$

(c) $\int_0^4 \sqrt{x} dx;$

(e) $\int_0^\pi (\sin x + \cos x) dx;$

(b) $\int_1^t \frac{2 dx}{x};$

(d) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx;$

(f) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} (e^x + e^{-x}) dx.$

Задача 2. Пусть

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt.$$

Найти $G'(x)$.

Задача 3. Докажите, что

(a) $\int_1^{100} e^{-x^2} dx < \frac{99}{e};$

(b) $\int_0^1 e^x \sin x dx < 2;$

(c) $\int_1^{100} e^{-x^2} dx < \frac{1}{e}.$

Задача 4. Найти все возможные функции $F(x)$, определённые на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которых справедливо утверждение

(a) $F'(x) = \frac{1}{x}$

(b) $F'(x) = \frac{1}{x^2}$

для всех $x \neq 0$.

Задача 5. Найти площадь области, ограниченной кривыми.

- (a) $y = x$ и $y = x^2$;
- (b) $y = x^2$ и $y^2 = x$;
- (c) (☒) $4x + y^2 = 12$ и $y = x$;
- (d) (☒) $y = |x|$ и $y = x^2 - 2$;
- (e) $y = 1/x$, $y = x$ и $y = x/4$ в области $x > 0$;
- (f) (☒) $y = 3x^2$, $y = 8x^2$ и $4x + y = 4$ в области $x \geq 0$.

Задача 6. С помощью формулы замены переменных найти следующие интегралы. (Не забудьте вернуться к исходной переменной; и константу не забудьте.)

- (a) $\int \sin(\pi x) dx$;
- (b) $\int x \sin x^2 dx$;
- (c) (☒) $\int x^2(x^3 + 2)^{12} dx$;
- (d) $\int e^x \sin e^x dx$;
- (e) $\int \frac{\ln x}{x} dx$;
- (f) (☒) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$;
- (g) (☒) $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2} dx$;
- (h) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$;
- (i) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$.

Задача 7. Найти интегралы с помощью интегрирования по частям.

- (a) $\int x \sin 3x dx$;
- (b) $\int x e^{-x} dx$;
- (c) (☒) $\int e^x \sin 2x dx$;
- (d) $\int \ln x dx$;
- (e) (☒) $\int (\ln x)^2 dx$;
- (f) (☒) $\int x^5 \ln x dx$.