Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 23 (27 ноября 2020)
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Найти все первые частные производные следующих функций

(a) x^3y^2;
(b) e^{x^2+y};
(c) (🏠) $\sin(x^2+y^2)$;
(d) $\max(x,y)$;
(e) (🏠) $|x|+|y|$;
(f) (🏠) xy^2z^3.

Задача 2. Рассмотрим функцию $f(x,y)=x^2+y^2-5xy$.
(a) Найдите её первые частные производные
(b) В каких точках обе частные производные обращаются в ноль?
(c) Постройте графики функций $f(x,0)$ и $f(0,y)$.
(d) Как вы думаете, является ли точка $(0,0)$ минимумом функции f?
(e) Постройте график функции $h(x)=f(x,x)$.

Определение 1. Рассмотрим отрезок $[a,b]$, $b>a$. Отметим на нём $(n-1)$ различную точку. Эти точки разобьют отрезок $[a,b]$ на n отрезочков поменьше. Обозначим эти отрезочки через I_k, $k=1,\ldots,n$. Выберем на каждом отрезочке I_k по какой-то точке $x_k\in I_k$. Набор отрезков I_k вместе с набором отмеченных на них точек x_k называется *размеченным разбиением* отрезка $[a,b]$.

Для данного размеченного разбиения обозначим длину отрезка I_k через Δx_k.

Определение 2. *Диаметром* разбиения Π называется длина самого длинного отрезка, входящего в это разбиение:

$$d(\Pi):=\max_{k=1,\ldots,n}\Delta x_k.$$

Определение 3. *Интегральной суммой* для функции f и размеченного разбиения Π называется сумма

$$S_\Pi(f)=\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k,$$

где x_k и Δx_k в правой части соответствуют разбиению Π.

Определение 4. *Определенным интегралом* от функции f по отрезку $[a,b]$, $b>a$, называется такое число I (если оно существует), что для всякого $\varepsilon>0$ существует такая $\delta>0$, что для любого размеченного разбиения Π отрезка $[a,b]$, диаметр которого меньше δ, интегральная сумма $S_\Pi(f)$ находится на расстоянии меньше ε от I, то есть

$$|S_\Pi(f)-I|<\varepsilon.$$

Определенный интеграл от функции f по отрезку $[a, b]$ обозначается через

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Неформально можно записать

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f).$$

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, интеграл от неё по этому отрезку существует.*

Задача 3. Найдите определенные интегралы, пользуясь определением. Поскольку подыинтегральные функции непрерывны, интеграл существует, и значит достаточно найти предел интегральных сумм для какой-нибудь последовательности разбиений со стремящимися к нулю диаметрами. Проще всего использовать разбиение на отрезки одинаковой длины, а в качестве отмеченных точек брать концы отрезков.

(a) $\int_{-1}^2 3\,dx$; (b) $\int_1^3 x\,dx$; (c) (🏠) $\int_0^1 e^x\,dx$.

Задача 4. (*) Докажите по индукции, что

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пользуясь этим равенством, вычислите по определению

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Задача 5. Пользуясь геометрической интерпретацией определённого интеграла как площади с учётом знака найти следующие интегралы.

(a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; (b) (🏠) $\int_a^b x\,dx$; (c) $\int_{-3}^3 x^2 e^{-x^2} \sin x\,dx$.