

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 22 (25 ноября 2020)***И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих***Задача 1.** Про функцию f известно, что она n раз дифференцируема в точке x_0 и

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

$$f^{(n)}(x_0) = 42,$$

где $f^{(i)}$ — i -я производная функции f . Пусть(а) $n = 2020$,(б) $n = 2021$.Может ли точка x_0 быть точкой максимума функции f ? Точкой минимума? Не быть ни тем, ни другим? Ответ обосновать.**Теорема 1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция f имеет n непрерывных производных на отрезке $[a, b]$ и $(n+1)$ производную на интервале (a, b) . Тогда существует такое $c \in (a, b)$, что

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Задача 2. С помощью формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа вычислите без использования компьютера(а) $\cos 1$ с точностью до сотых;(б) $\ln(3/2)$ с точностью до сотых;(с) $e^{1/4}$ с точностью до тысячных

и докажите оценку на погрешность.

Задача 3. Разложите в ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ функции(а) $\sin x$;(б) $\cos x$;(с) e^x

и докажите, что ряд сходится к соответствующей функции всюду.

Замечание 1. Ряд Тейлора в точке $x_0 = 0$ также называется рядом Маклорена.**Задача 4.** Разложите в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$ функцию $\ln x$ и докажите, что(а) ряд Тейлора сходится к этой функции на интервале $(1/2, 2)$;(б) ряд Тейлора расходится при $x < 0$ и $x > 2$.**Задача 5.** Разложите в ряд Тейлора функцию $\frac{1}{1-x}$ в точке $x_0 = 0$. При каких значениях x ряд Тейлора сходится к породившей её функции?**Замечание 2.** Кстати, если разложить функцию $\ln(1-x)$ в ряд в нуле и продифференцировать все члены этого ряда, получится ряд для $-\frac{1}{1-x}$.