Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 20 (18 ноября 2020)

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Пользуясь при необходимости правилом Лопиталя найдите предел

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x+1}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x^2}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$;

(e) (🏠) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$;

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

(g) (🏠) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

(h) (🏠) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)}{(\sin x)^2}$

Задача 2. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Применимо ли к нему утвержение из правила Лопиталя? Что получится, если применить правило Лопиталя? Чему равен этот предел?

Определение 1. Говорят, что функция f есть O-*большое* от функции g при[1] $x\to+\infty$, если существуют такие константы C и D, что для для любых $x>D$ выполнено $|f(x)|\le C|g(x)|$.

Определение 2. Говорят, что функция f есть o-*малое* от функции g при $x\to+\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Замечание 1. *На письме выражение «f есть O-*большое *(соответственно, о-малое) от g» записывается как $f(x)=O(g(x))$ (соответственно, $f(x)=o(g(x))$). При этом, однако, следует учитывать, что знак равенства здесь — некоторая условность, потому что $O(g(x))$ и $o(g(x))$ — это не конкретные функции, а множества функций. Например, неправда, что если $f_1(x)=O(g(x))$ и $f_2(x)=O(g(x))$, то $f_1(x)=f_2(x)$ (чего мы обычно ожидаем от знака равенства). Правильнее было бы писать $f(x)\in o(g(x))$ и т.д., но так никто не делает, и мы тоже не будем.*

Задача 3. Какие из следующих равенств верны при $x\to+\infty$?

(a) $1=O(1)$;

(b) $1=o(1)$;

(c) (🏠) $1=O(1\,000)$;

(d) (🏠) $1=o(1\,000)$;

(e) $1=O(x)$;

(f) $1=o(x)$;

(g) $1=O(0)$;

(h) $1=o(0)$;(🏠)

(i) $0=O(1)$;

(j) $0=o(1)$;

[1] Аналогично определяются $O(g)$ и $o(g)$ и при $x\to-\infty$, $x\to\infty$, $x\to 0$, $x\to a$.

(k) $x = O(x^2)$;
(l) $x = o(x^2)$;
(m) $x^2 = O(x)$;
(n) (🏠) $x^2 = o(x)$;
(o) (🏠) $\ln x = O(x)$;
(p) $\ln x = o(x)$;
(q) (🏠) $x = O(e^x)$;
(r) $x = o(e^x)$
(s) $\sin x = o(x)$;
(t) (🏠) $\sin x = O(1)$;
(u) (🏠) $\sin x = o(1)$;
(v) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = O(x^3)$;
(w) (🏠) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^3)$;
(x) (🏠) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^4)$;
(y) $(x^3 + 100x^2 - 23x + 5) \sin x = O(x^3)$;
(z) (🏠) $(x^3+100x^2-23x+5) \sin x = o(x^4)$.

Задача 4. Какие из следующих равенств верны при $x \to 0$?

(a) $1 = O(1)$;
(b) $1 = o(1)$;
(c) $x = O(x^2)$;
(d) $x = o(x^2)$;
(e) $x^2 = O(x)$;
(f) (🏠) $x^2 = o(x)$;
(g) $\ln x = O(x)$;
(h) (🏠) $\ln x = o(x)$;
(i) $x = O(e^x)$;
(j) (🏠) $x = o(e^x)$
(k) (🏠) $\sin x = o(x)$;
(l) $\sin x = O(x)$;
(m) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = O(x^3)$;
(n) (🏠) $x^3 + 100x^2 - 23x + 5 = o(x^3)$;
(o) $x^3 + 100x^2 - 23x = O(x^3)$;
(p) $x^3 + 100x^2 - 23x = o(x^3)$;
(q) $x^3 + 100x^2 - 23x = O(x)$;
(r) (🏠) $x^3 + 100x^2 - 23x = o(x)$.

Задача 5. Какие из следующих утверждений верны при $x \to +\infty$?
(a) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x) = o(g(x))$.
(b) Если $f(x) = o(g(x))$, то $f(x) = O(g(x))$.
(c) Если $f(x) = O(g(x))$, то $g(x) = O(f(x))$.
(d) (🏠) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x)h(x) = O(g(x)h(x))$.
(e) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$.
(f) (🏠) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g(x))$.
(g) Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.
(h) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x))$.
(i) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$.
(j) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$.
(k) (🏠) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x)+f_2(x) = O(g_1(x)+g_2(x))$.
(l) (🏠) Если $f_1(x) = o(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x))$.
(m) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = O(h(x))$.
(n) (🏠) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.
(o) (🏠) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.
(p) (🏠) Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.

Замечание 2. *Запись* $f(x) = g(x) + o(h(x))$ *означает, что* $f(x) - g(x) = o(h(x))$. *Аналогично, запись* $f(x) = g(x) + O(h(x))$ *означает, что* $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

Задача 6. Пусть известно, что $f(x) = 42 + o(1)$ при $x \to 0$. Найти $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Задача 7. Пусть известно, что $f(x) = 1 + 2x + o(x)$ при $x \to 0$. Найти $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Задача 8. Пусть известно, что $f(x) = 3x + o(x)$ при $x \to 0$. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Задача 9. Пусть известно, что $f(x) = 1 + O(x)$ при $x \to 0$. Найти $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Задача 10. Пусть известно, что $f(x) = 1+3x+O(x^2)$ при $x \to 0$. Найти $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

Задача 11. (🏠) Существует ли функция, являющаяся $o(x)$, но не являющаяся $O(x^2)$

(a) при $x \to 0$; (b) при $x \to +\infty$?

Задача 12. Пусть $f(x) = O(g(x))$. Верно ли, что $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$.

Задача 13. Пусть $f(y) = y + 2y^2 + o(y^2)$ при $y \to 0$. Представить $f(3x + x^2)$ в виде $P(x) + o(x^2)$ при $x \to 0$, где $P(x)$ — многочлен степени не больше 2.

Задача 14. (🏠) Пусть $f(y) = y+2y^2+o(y^2)$ при $y \to 0$. Представить $f(3x+x^2+o(x^2))$ в виде $P(x) + o(x^2)$ при $x \to 0$, где $P(x)$ — многочлен степени не больше 2.