

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год****Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 19 (13 ноября 2020)**

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

**Определение 1.** Функция называется выпуклой вниз (вверх), если любая хорда лежит над (под) графиком функции.

**Определение 2.** Множество на плоскости называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками оно содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

**Определение 3.** Надграфиком (подграфиком) функции  $f$  называется множество точек плоскости, лежащих над (под) графиком  $y = f(x)$ :

$$\text{supergraph}(f) := \{(x, y) \mid y \geq f(x), x \in D(f)\}. \quad (1)$$

$$\text{subgraph}(f) := \{(x, y) \mid y \leq f(x), x \in D(f)\}. \quad (2)$$

**Задача 1.** Докажите, что функция выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда её надграфик (подграфик) является выпуклым множеством.

**Задача 2.** (♠) Докажите, что полуплоскость (то есть надграфик или подграфик линейной функции) — выпуклое множество.

**Задача 3.** Пусть функция  $f$  всюду определена, выпукла вниз и для некоторых двух точек  $x_2 > x_1$ ,  $f(x_2) > f(x_1)$ . Докажите, что функция возрастает на луче  $[x_2, +\infty)$ . Пользоваться производными нельзя: никто не сказал, что они существуют во всех точках.

**Задача 4.** (Основано на Stewart, Calculus, Early transcendentals.) Найти промежутки выпуклости и точки перегиба, интервалы возрастания и убывания, максимумы и минимумы. Построить график функции.

(a)  $e^{-x^2/2}$

(d)  $\sqrt{x^2 + 1} - x$

(b)  $\frac{x^2}{x^2 - 1}$

(e) (♠)  $\frac{e^x}{1 + e^x}$

(c) (♠)  $\frac{x^2}{(x - 2)^2}$

(f)  $\ln(1 - \ln x)$

(g)  $e^{-1/(1+x)}$

**Задача 5.** Докажите *неравенство Йенсена*: для любой выпуклой (вниз) функции  $f$ , любых точек  $x_1, \dots, x_n$  и любых таких чисел  $p_1, \dots, p_n$ , что  $p_1 + \dots + p_n = 1$  и для всех  $i = 1, \dots, n$ ,  $p_i \geq 0$ , верно неравенство:

$$f(p_1x_1 + \dots + p_nx_n) \leq p_1f(x_1) + \dots + p_nf(x_n)$$

**Подсказка.** Вам нужна индукция.

**Задача 6.** (\*) Рассмотрим несимметричную игральную кость с  $n$  гранями, пронумерованными числами от 1 до  $n$ . Пусть грань  $i$  выпадает с вероятностью  $p_i$ . *Энтропией* этой игральной кости называется величина:

$$H(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \log \frac{1}{p_i}.$$

Докажите, что при фиксированном  $n$  энтропия максимальна, если для всех  $i$ ,  $p_i = 1/n$ .

**Задача 7.** (\*) Пусть функция  $f$  выпукла вниз. Докажите, что она непрерывна в любой точке.

**Определение 4.** Пусть функция  $f$  определена на полуинтервале  $[x_0, b)$ . Её *правой производной* в точке  $x_0$  называется предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3)$$

Аналогично можно определить левую производную. Вместе они называются *односторонними производными*.

**Задача 8.** (\*) Пусть функция  $f$  выпукла вниз. Докажите, что у неё в любой точке существует правая производная и левая производная.

**Задача 9.** (\*) Пусть функция  $f$  выпукла вниз. Докажите, что для любой точки  $x_0$  найдётся прямая, проходящая через точку  $(x_0, f(x_0))$  и лежащая нестрого ниже графика функции  $f$ .