Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 18 (12 ноября 2020)

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Теорема 1. *Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке и обратима. Пусть она дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и её производная равна*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Задача 1. С помощью теоремы о производной обратной функции найдите производные следующих функций

(a) $\sqrt{x}$;
(b) (⌂) $\sqrt[3]{x}$;
(c) $\ln x$;
(d) $\arcsin x$;
(e) (⌂) $\arccos x$;
(f) (⌂) $\operatorname{arctg} x$.

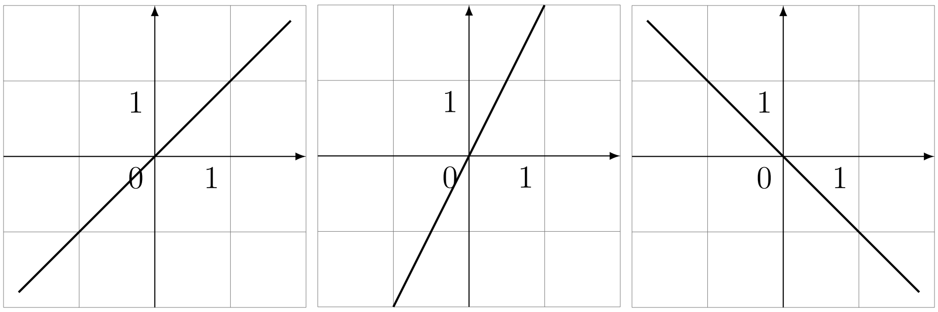
Задача 2. Пользуясь равенством $a^x = e^{x \ln a}$ найти производную функции

(a) a^x;
(b) x^x;
(c) (⌂) $x^{(x^x)}$.

Задача 3. Найдите производные
(a) $\log_5 x$;
(b) (⌂) $\operatorname{arctg} \sqrt{|2x|}$;
(c) $e^{4 \ln x}$;
(d) (⌂) $e^{f(x)}$, если производная $f(x)$ известна;
(e) $\ln f(x)$, если производная $f(x)$ известна;
(f) (⌂) $(\log_3 x)^{x^2+3}$.

Задача 4. Часто при графическом изображении зависимостей используют *логарифмические шкалы*, то есть по осям откладывают не сами значения величин, а их логарифмы. Логарифмическая шкала удобна, если интересующая нас величина меняется «на порядки» — например, зарплата конкретного человека может составлять 10 тыс. рублей в месяц, может 100 тыс. рублей, а может и десятки миллионов руб. При этом мы хотели бы на графике отразить разницу как между 10 тыс. и 100 тыс., так и между 100 тыс. и десятком миллионов. Если взять обычную линейную шкалу и отмасштабировать её таким образом, чтобы на графике уместились точки, соответствующие ста миллионам, то разница между 10 и 100 тысячами станет невидимой глазу. Логарифмическая шкала позволяет справиться с этой проблемой.

Рассмотрим графики



Записать зависимость формулой и нарисовать график в обычных осях (x, y), если

(a) вертикальная ось является логарифмической (то есть по вертикали откладывается $\ln y$), а горизонтальная — обычной;

(b) вертикальная ось является обычной, а горизонтальная — логарфимической;

(c) обе оси являются логарифмическими.

Задача 5. Укажите и классифицируйте точки разрыва. Найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы, промежутки монотонности, асимптоты для следующих функций. Нарисуйте эскизы графиков.

(a) $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2} - 6x$; (b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; (c) (🏠) $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Задача 6. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 \ln(2x).$$

Найти односторонний предел функции в точке $x = 0$, доопределить функцию в этой точке по непрерывности, то есть рассмотреть функцию $\tilde{f}$, которая совпадает с f во всех точках, кроме $x = 0$, а в $x = 0$ принимает такое значение, что $\tilde{f}$ односторонне непрерывна в этой точке. Имеет ли функция $\tilde{f}$ односторонюю производную в точке $x = 0$? Если да, найти её. Найти односторонний предел производной $\tilde{f}$ при $x \to 0^+$. Провести полное исследование $\tilde{f}$, построить её график.