Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 17 (5 ноября 2020)
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Пусть функция f непрерывна на всей числовой прямой и имеет две различные горизонтальные асимптоты. Докажите, что она ограничена.

Задача 2. Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), причём $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$. Докажите, что функция $f(x)$ является постоянной на $[a, b]$.

Задача 3. (a) Докажите, что если f дифференцируема на интервале (a, b) и во всех точках $x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$, то f строго возрастает на (a, b).
(b) Верно ли обратное?

Задача 4. (⌂) Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Докажите с помощью теоремы Лагранжа, что $f(x)$ неубывает на (a, b) если и только если $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b)$. (В чём разница этой задачи с задачей 3?)

Задача 5. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x}{10} + x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad f(0) = 0.$$

Докажите, что $f'(0) > 0$, но при этом не существует такой окрестности точки 0, что в этой окрестности функция f возрастает.

Задача 6. Пусть функция f определена и дифференцируема на интервале (a, b) и при этом $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.
(a) (⌂) Докажите, что функция f' не является ограниченной на (a, b).
(b) Обязательно ли $\lim_{x\to b^-} f'(x) = +\infty$?

Задача 7. Найдите локальные и глобальные максимумы и минимумы, промежутки монотонности, асимптоты для следующих функций. Нарисуйте графики.

(a) $x^3 - x^2 - x + 1$;
(b) $\sin 2x - x$;
(c) $\dfrac{x+1}{x-1} + 2x$;
(d) (⌂) $2 + \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$;
(e) (⌂) $\dfrac{x^2}{x+2}$;
(f) (⌂) e^{x-x^2}.

Задача 8. Пусть f дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) = 0$. Докажите, что существует некоторая константа M и такая окрестность U точки x_0, что $|f(x)| < M|x - x_0|$ для всех $x \in U$. (Это можно сделать без теоремы Лагранжа, просто используя определение производной.)

Задача 9. Пусть f дифференцируема во всех точках отрезка $[a, b]$ (в граничных точках существуют односторонние производные) и её производная непрерывна на этом отрезке. (Такие функции называют *гладкими.*) Пусть $x_0 \in (a, b)$ и $f(x_0) = 0$. Докажите, что существует такая константа M, что $|f(x)| < M|x - x_0|$ для всех $x \in [a, b]$. Сможете ли вы это сделать по аналогии с предыдущей задачей без теоремы Лагранжа?

Задача 10. (*) Докажите, что у производной не бывает разрывов первого рода. Иными словами, если функция f дифференцируема на некотором интервале (a, b) и в точке $x_0 \in (a, b)$ существуют односторонние пределы $\lim_{x \to x_0^-} f'(x)$ и $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$, то эти пределы равны между собой и равны $f'(x_0)$.