

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 16 (30 октября 2020)**

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Некоторые задачи основаны на книге Stewart, Calculus, Early transcendentals

Теорема 1. Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x . Тогда

1. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

2. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

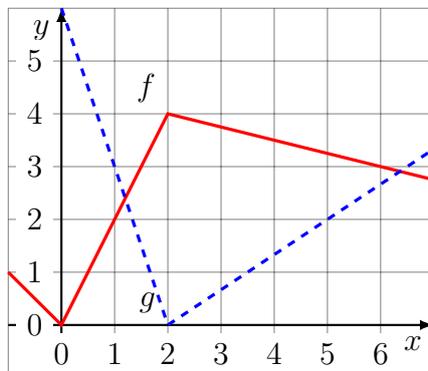
Задача 1. (☞) Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x и $g(x) \neq 0$. Докажите, что тогда

(a) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

(b) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Теорема 2. Пусть f дифференцируема в точке x_0 и g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда

$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x).$$

Задача 2. Графики функций f и g изображены на картинке. Пусть $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ и $w(x) = g(g(x))$. Найти следующие производные, если они существуют. Если не существуют, объяснить, почему.

(a) $u'(1)$;

(b) (☞) $v'(1)$;

(c) (☞) $w'(1)$.

Задача 3. Может ли такое быть, что f и g не дифференцируемы в точке x_0 , а

(a) $f + g$;

(b) (☞) fg

дифференцируема в этой точке?

Задача 4. Может ли такое быть, что f не дифференцируема в точке x_0 , g дифференцируема в точке $f(x_0)$ и при этом композиция $g \circ f$ дифференцируема в x_0 ?**Задача 5.** Представляя a^x в виде $e^{x \ln a}$, найти $(a^x)'$.**Задача 6.** Найти производные следующих функций и укажите область определения этих производных:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\frac{\sin x}{2 \cos x + 3};$ | (i) $(\checkmark) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$ | (m) $\begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ |
| (b) $x^2 e^x;$ | (j) $e^{2 \sin x} \cos^2 x^2;$ | (n) $\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ |
| (c) $(\checkmark) x^2 e^x \sin x$ | (k) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$ | (o) $\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ |
| (d) $(\checkmark) \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 1};$ | (l) $\begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ | (p) $(\checkmark) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ |
| (e) $(\checkmark) \sin \sqrt{1 + x^2};$ | | |
| (f) $\sin^2 x + \cos^2 x;$ | | |
| (g) $e^{x^2};$ | | |
| (h) $e^{2^x};$ | | |

Задача 7. Найти такую функцию f , что при всех $x \in \mathbb{R}$

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $f'(x) = 1$ | (d) $f'(x) = \sin x$ | (g) $f'(x) = e^{2x}$ |
| (b) $f'(x) = x$ | (e) $(\checkmark) f'(x) = \cos x$ | (h) $f'(x) = f(x)$ |
| (c) $(\checkmark) f'(x) = x^2$ | (f) $f'(x) = e^x$ | (i) $(\checkmark) f'(x) = 2f(x)$ |

Задача 8. Дана парабола — график функции $y = x^2$. Выясните, из каких точек плоскости к ней можно провести:

- Одну касательную?
- Две касательных?
- Ни одной касательной?

Задача 9. (*) Рассмотрим зеркало в форме параболы $y = x^2$. Докажите, что пучок лучей, параллельных оси Oy , отразившись от зеркала, собирается в одной точке (фокусе параболы). Найдите эту точку.