**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**
**Математический анализ 1** (http://math-info.hse.ru/s20/3)
**Семинар 13 (13 октября 2020)**
*И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*

**Задача 1.** Пусть функция $f$ имеет разрыв в точке $x_0$, а функция $g$ непрерывна в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке $x_0$? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

**Задача 2.** (🏠) Пусть функция $f$ имеет разрыв в точке $x_0$, а функция $g$ тоже имеет разрыв в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке $x_0$? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

**Задача 3.** (🏠) Пусть функция $f$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $g$ имеет разрыв в точке $f(x_0)$. Может ли функция $h(x) = g(f(x))$ быть непрерывной в точке $x_0$? Считать что обе функции определены на всей числовой прямой.

**Задача 4.** (🏠) Привести пример таких функций $f$ и $g$, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y\to y_0} g(x) = a \in \mathbb{R}$$

и при этом $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$ не существует.

**Подсказка.** Модифицируйте пример из лекций.

**Задача 5.** Доказать непрерывность функции $f(x) = e^x$ во всех точках.

**Подсказка.** Представить $e^x = e^{x_0}e^{x-x_0}$, затем доказать, что $\lim_{x\to x_0} e^{x-x_0} = 1$. Для последнего представить $e^x$ как $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

**Замечание 1.** *Заметим, что для любого $a > 0$, можно записать:*

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}.$$

*Мы будем использовать это равенство как определение значения выражения $a^x$ для иррациональных $x$. Поскольку фукнция $e^x$ непрерывна для всех $x$, функция $a^x$ также является непрерывной для любого $a > 0$.*

**Задача 6.** Доказать непрерывность функции $f(x) = \sin x$ во всех точках.

**Подсказка.** Использовать формулу для синуса разности и неравенство $|\sin x| \le |x|$.

**Задача 7.** (🏠) Доказать непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ для всех $x \ge 0$ (в нуле — одностороннюю непрерывность).

**Задача 8.** (Частично с прошлого семинара.) Найти естественную область определения функции, заданной формулой. (То есть множество всех $x$, при которых выражение, заданное формулой, определено.) Найти все вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Построить эскиз графика.

(Новое!) В каких точках функция непрерывна? Односторонне непрерывна? Почему? Найти все точки разрывов, установить их тип (скачок, устранимый разрыв, полюс, существенный разрыв). Существуют ли такие точки, что функцию можно в этой точке до- или переопределить и сделать таким образом непрерывной в этой точке?

(a) $\dfrac{x+2}{x^2-1}$

(b) (🏠) $\dfrac{x+2}{x^2+1}$

(c) $\dfrac{x^2-1}{x-4}$

(d) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$

(e) (🏠) $\dfrac{2x^2-1}{x^2-4}$

(f) $\sqrt{x^2-1}$

(g) (🏠) $\sqrt{x^2+1}$

(h) $\sqrt{\dfrac{x^4-1}{x+1}}$

(i) $\dfrac{\sin x}{x}$

(j) $\dfrac{1}{\sin \frac{1}{x}}$

(k) $\dfrac{\sin \frac{1}{x}}{x}$

(l) $x \sin \dfrac{1}{x}$

(m) $x + \sin x$

(n) $x + \dfrac{\sin x}{x}$

(o) $\operatorname{tg} x$

(p) (🏠) $x \sin x$

(q) $e^{\frac{1}{x}}$

(r) $e^{\frac{1}{x^2}}$

(s) $e^{-\frac{1}{x^2}}$

(t) $\begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(u) $\begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(v) $\dfrac{|x|}{x}$

(w) $\dfrac{x^3+3^x}{x^2+2^x}$

(x) (🏠) $\dfrac{x^2-2^x}{x^2+3^x}$

(y) (🏠) $\dfrac{2^x-3^{-x}}{3^x+2^{-x}}$

(z) (🏠) $\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}$

**Задача 9.** Какими нужно выбрать значения параметров $a$ и $b$, чтобы следующая функция была непрерывной?

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ ax+b, & 0 \le x \le 2 \\ x^2-3, & x > 2. \end{cases}$$