

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 10 (2 октября 2020)***И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих***Определение 1.** *Проколотой ε -окрестностью точки a называется множество*

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

Его можно также задать как

$$\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Определение 2. Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a . Говорят, что *предел функции f при x стремящемся к a равен b* , если выполняется следующее:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathring{U}_\delta(a): |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Другая запись:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Замечание. *Во всех задачах полезно рисовать графики функций или их эскизы.***Задача 1.** Пользуясь определением доказать следующие утверждения. Указать значение δ , соответствующее $\varepsilon = 1/10$.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} 4x = 8;$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3;$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3} x \neq 5;$

(d) $\lim_{x \rightarrow -1} 4x = -4;$

(e) $\lim_{x \rightarrow 5} x^2 = 25;$

(f) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 \neq 7;$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8;$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} |2x| = 0;$

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 6) = 0;$

(j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5;$

(k) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2;$

(l) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x} = \frac{1}{7};$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x;$

(n) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x.$

Задача 2. Существует ли предел функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

при $x \rightarrow 0$?

Задача 3. (♠) Найти предел функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

при $x \rightarrow 2$, если он существует.

Задача 4. Найти предел функции Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

при $x \rightarrow \sqrt{2}$, если он существует.

Задача 5. Найти предел

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{2\pi}{x},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{2\pi}{x}$

если он существует.