

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год

Математический анализ 1 (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)

Семинар 9 (30 сентября 2020)

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 2. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n$$

для любого целого m .

Задача 3. (♠) Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n$$

для любого рационального q .

Задача 4. Положим по определению:

$$\exp a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Докажите, что $\exp a$ существует для всех вещественных a .

Замечание 1. Мы определили функцию $\exp a$ и доказали, что для всех рациональных a её значение равно e^a . Для иррациональных a мы положим по определению $e^a := \exp a$ (иначе непонятно, что такое «возведение числа в иррациональную степень»). В дальнейшем обозначения e^a и $\exp a$ считаются эквивалентными.

Задача 5. Докажите, что

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

(Напомним, что $0! = 1$ по определению.)

Задача 6. Докажите, что

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

Задача 7. (*) Докажите, что для любых вещественных a, b :

$$\exp(a + b) = \exp a \cdot \exp b.$$

Подпоследовательности и предельные точки

Задача 8. Найти все предельные точки последовательности. Докажите, что других нет.

(a) $\{(-1)^n\}$; (b) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$; (c) (*) $\{\sin n\}$.

Задача 9. Придумайте последовательность, предельными точками которой являются

- (a) число 0;
- (b) числа 0 и $\sqrt{2}$;
- (c) все натуральные числа;
- (d) (☒) все рациональные числа.

Задача 10. Верно ли, что если у последовательности есть единственная предельная точка, то эта последовательность сходится к этой точке? Докажите или постройте контрпример.

Задача 11. Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к бесконечности.

Задача 12. (☒) Верно ли, что если у ограниченной последовательности есть единственная предельная точка, то эта последовательность сходится к этой точке? Докажите или постройте контрпример.

Задача 13. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Обозначим множество её предельных точек через L . Рассмотрим некоторую последовательность $\{x_k\}$, все элементы которой лежат в L . Пусть $x_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Докажите, что $c \in L$.

Задача 14. (☒) Придумайте пример последовательности, предельными точками которой являются все вещественные числа, или докажите, что такой последовательности не существует.

Задача 15. (☒) Придумайте пример последовательности, предельными точками которой являются все иррациональные числа, и ни одно рациональное число не является предельной точкой, или докажите, что такое последовательности не существует.