Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 8 (25 сентября 2020)
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Доказать, что предел последовательности существует, и найти его:

(a) $\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\dots$ (b) (🏠) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\dots$

Подсказка: выразите a_{n+1} через a_n и исследуйте эту последовательность на монотонность и ограниченность.

Задача 2. Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{x})$, $a>0$, $x>0$. Определим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1=1$, $x_{n+1}=g(x_n)$, $n=1,2,\dots$. Доказать, что существует $\lim_{n\to\infty}x_n$ и найти его.

Задача 3. В выражении $(2+x)^{25}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найти коэффициент при x^{12}.

Задача 4. (🏠) В выражении $(x+3y)^{20}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найти коэффициент при x^4y^{16}.

Задача 5. Буратино положил 1000 рублей на банковский счёт под 100% годовых. Проценты по счёту начисляются через равные промежутки времени n раз в год. Например, если $n=1$, то проценты будут начислены один раз в конце года, если $n=2$, то два раза — в середине и конце года (каждый раз будет начислено 50%) и т.д. Проценты начисляются с капитализацией (например, если $n=2$, то в конце первого полугодия будут начислены проценты на исходную сумму, а в конце второго — на сумму, которая получилась в конце первого полугодия после начисления процентов). Сколько денег будет у Буратино в конце года в зависимости от n? Как ведёт себя эта величина при $n\to\infty$? (Это называется *непрерывное начисление процентов.*)

(Решение этой задачи и привело к открытию числа e.)

Определение 1. Числом e называется следующий предел:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Задача 6. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 7. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{m}{n}\right)^n$$

для любого целого m.

Задача 8. (🏠) Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{q}{n}\right)^n$$

для любого рационального q.

Задача 9. Положим по определению:

$$\exp a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n.$$

Докажите, что $\exp a$ существует для всех вещественных a.

Замечание 1. *Мы определили функцию $\exp a$ и доказали, что для всех рациональных a её значение равно e^a. Для иррациональных a мы положим по определению $e^a := \exp a$ (иначе непонятно, что такое «возведение числа в иррациональную степень»). В дальнейшем обозначения e^a и $\exp a$ считаются эквивалентными.*

Задача 10. Докажите, что

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

(Напомним, что $0! = 1$ по определению.)

Задача 11. Докажите, что

$$\exp a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}.$$

Задача 12. (*) Докажите, что для любых вещественных a, b:

$$\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b.$$