Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 7 (23 сентября 2020)

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Чему может равняться значение выражения:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$; (b) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$?

Ответ обосновать, привести все необходимые примеры и доказательства.

Задача 2. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Чему может равняться значение выражения:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$; (d) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$?

Ответ обосновать, привести все необходимые примеры и доказательства.

Задача 3. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Чему может равняться

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

если

(a) $A \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$; (b) $A = 0$; (c) (⌂) $A = +\infty$?

Определение 1. Скажем, что $a_n \to A + 0$ (или $a_n \to A^+$) при $n \to \infty$ (говорят: «a_n стремится к A *справа*»), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $A \leq a_n < A + \varepsilon$.

Аналогично, $a_n \to A - 0$ (или $a_n \to A^-$) при $n \to \infty$ (говорят: «a_n стремится к A *слева*»), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $A - \varepsilon < a_n \leq A$.

Задача 4. Пусть известно, что $a_n \to 0^+$ при $n \to \infty$. Что вы можете сказать про

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}?$$

Задача 5. (⌂) Пусть известно, что $a_n \to -\infty$ при $n \to \infty$. Куда и с какой стороны стремится $1/a_n$?

Задача 6. (Перенесено из семинара 4) Для любой последовательности $\{a_n\}$ рассмотрим последовательность её средних арифметических $b_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

(a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

(b) (⌂) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ кратко обозначается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Например,

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Рассмотрим теперь последовательность s_k:

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Если существует $\lim\limits_{k\to\infty} s_k$, его обозначают через

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots$$

Задача 7. Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_n = cq^{n-1}$.

(a) Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} b_n = c\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

(b) Докажите, что при $|q| < 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n = c\frac{1}{1 - q}.$$