Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 6 (17 сентября 2020)
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0.$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Определение 1. Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}$, $b_k = a_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Задача 2. Докажите, что если у последовательности есть предел, то у любой её подпоследовательности тоже есть предел, причём такой же. Верно ли обратное?

Задача 3. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0.$$

Подсказка: пусть k — такое натуральное число, что $2^k < n \leq 2^{k+1}$. (Такое k обязательно найдётся, потому что $2^k \to +\infty$ при $k \to \infty$.) Докажите, что в этом случае $\frac{\log_2 n}{n} \leq \frac{k+1}{2^k}$.
Вопрос: почему нельзя просто взять подпоследовательность $n = 2^k$ и воспользоваться предыдущей задачей?

Задача 4. Докажите, что если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Задача 5. (🏠) Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}.$$

Арифметика пределов

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$*,* $A, B \in \mathbb{R}$*. Тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$*;*
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$*;*
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$ *если* $A \neq 0$*;*

Начиная с этого момента этими правилами можно пользоваться, если не оговорено обратное. Также можно пользоваться предыдущими задачами.

Задача 6. Найдите пределы, если они существуют. Если не существуют, докажите. При использовании правил арифметики пределов требуется обосновать их применимость на каждом шаге.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2 - 12n}{2n^2 + 7n - 2}$

(b) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 10}{n^2 + 1000n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + n}{\sqrt{n} - 2^n \log_2 n}$;

(e) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2^{-n}}{n^2 - 4n + 3}$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \ln n + 2}{n^2 - n + 1}$;

(g) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(2^n + 3^n)}{n}$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^{-n}}{3^n - 2^{-n}}$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n + n^3 - 2^{-n}}{2^n + 3}$;

(k) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5 + 5}}{n - 1}$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{n^2 - 5} - \sqrt{n^2 - n}}$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n}$;

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$;

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos \dfrac{1}{n}$;

(p) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg} \dfrac{1}{n}$;

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 n}{\sqrt{n} + 1}$.