Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 5 (16 сентября 2019)
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Осталось с прошлого семинара

Задача 1. Рассмотрим последовательность $a_n = q^n$, где $q \in \mathbb{R}$. При каких значениях q

(a) последовательность имеет предел? (Какой?)
(b) не имеет конечного предела и стремится к $+\infty$?
(c) не имеет конечного предела и стремится к ∞, но не к $+\infty$?
(d) не имеет конечного предела и при этом не стремится к ∞?

Все утверждения обосновать с помощью определения предела.

Задача 2. Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Пусть $b_n = a_{n+1}/a_n$.

(a) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое $c < 1$, что для всех $n > N$, $b_n < c$.
(b) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое M, что для всех $n > N$, $a_n < Mc^n$. (Подсказка: $a_n = a_1 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$.)
(c) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Новые задачи

Задача 3. Найти пределы. Если предел равен бесконечности (плюс бесконечности, минус бесконечности), доказать это.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10} \cdot 2^n}{3^n}$
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$.
(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}}{n+1}$.
(d) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}}{n^2+n}$.

Задача 4. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{200^n}{n!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Задача 5. Найти пределы

(a) (🏠) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$;
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$;
(c) (*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Задача 6. Докажите, что для всякого $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ и всякого $C > 0$ найдётся такое N что для всех $n > N$:

(a) $(1+a)^n > Cn^k$; (b) (🏠) $n! > Ca^n$.

Задача 7. Известно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0.$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

Определение 1. Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Последовательность $\{b_k\}$, $b_k = a_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

Задача 8. Докажите, что если у последовательности есть предел, то у любой её подпоследовательности тоже есть предел, причём такой же. Верно ли обратное?

Задача 9. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{n} = 0.$$

Подсказка: пусть k — такое натуральное число, что $2^k < n \leq 2^{k+1}$. (Такое k обязательно найдётся, потому что $2^k \to +\infty$ при $k \to \infty$.) Докажите, что в этом случае $\frac{\log_2 n}{n} \leq \frac{k+1}{2^k}$.
Вопрос: почему нельзя просто взять подпоследовательность $n = 2^k$ и воспользоваться предыдущей задачей?

Задача 10. Докажите, что если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Задача 11. (🏠) Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}.$$

Задача 12. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}.$$

Подсказка: докажите, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$