**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**
**Математический анализ 1** (http://math-info.hse.ru/s20/3)
**Семинар 4 (11 сентября 2020)**
*И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*

**Задача 1.** Является ли последовательность ограниченной, монотонной (возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей)? Вычислите предел, если он существует. Если последовательность стремится к $\infty$, $+\infty$, $-\infty$, укажите это. В каждом случае, когда предел существует, укажите номер $N$, который соответствует $\varepsilon = 1/8$ из определения предела.

(a) $a_n = 1000^n$ при $n < 3000$, $a_n = \frac{1}{n}$ при $n \geq 3000$;
(b) $a_n = 10^{-n}$ при $n = 3k$ (для какого-то целого $k$), $a_n = \frac{1000}{n}$ при $n \neq 3k$ (для всех $k$);
(c) (🏠) $a_n = 2^{-n}$ при $n \neq 3^k$ для всех целых $k$, $a_n = n$ при $n = 3^k$ для какого-то $k$.
(d) $a_n = 2^n$ для простых $n$ и $a_n = \sqrt{n}$ для составных $n$.

**Задача 2.** Пусть $a$ — некоторое вещественное число. Приведите пример последовательности $\{a_n\}$ (если такая существует), у которой:

(a) Есть предел, равный числу $a$.
(b) (🏠) Есть предел равный $a$, но ни один из членов последовательности не равен $a$.
(c) Есть предел равный $a$, при этом бесконечно много членов последовательности равны $a$ и бесконечно много членов последовательности не равны $a$. Придумайте, как записать такое утверждение при помощи кванторов.
(d) (🏠) Число $a$ не является пределом последовательности, при этом бесконечно много членов последовательности равны $a$.
(e) Последовательность является неограниченной, но при этом её предел не равен $\infty$.
(f) Предел равен $\infty$, но при этом не равен $+\infty$.
(g) Предел равен $-\infty$, но при этом не равен $\infty$.

**Задача 3.** Объясните, что означают следующие утверждения. Приведите пример последовательности, которая удовлетворяет указанному утверждению, и последовательности, которая ему не удовлетворяет. Что вы можете сказать про предел последовательности, которая удовлетворяет утверждению? Найдите все пары утверждений, которые являются отрицаниями друг к другу.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;
(b) $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;
(c) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$;
(d) (🏠) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;
(e) $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$;
(f) (🏠) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| \geq \varepsilon$.
(g) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : |a_n - a| < \varepsilon$;

**Задача 4.** Угадайте предел последовательности, пользуясь любыми разумными соображениями, и докажите, что это действительно предел последовательности, пользуясь определением.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1}$;

(c) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+5}}{3^n}$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^2+4n+3}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 2^n}{n}$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n}$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$;

(j) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{n}}$

(k) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1}$

(l) (⌂) $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}1^n$

**Задача 5.** Рассмотрим последовательность $a_n = q^n$, где $q \in \mathbb{R}$. При каких значениях $q$

(a) последовательность имеет предел? (Какой?)
(b) не имеет конечного предела и стремится к $+\infty$?
(c) не имеет конечного предела и стремится к $\infty$, но не к $+\infty$?
(d) не имеет конечного предела и при этом не стремится к $\infty$?

Все утверждения обосновать с помощью определения предела.

**Задача 6.** Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Пусть $b_n = a_{n+1}/a_n$.

(a) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое $c < 1$, что для всех $n > N$, $b_n < c$.
(b) Докажите, что найдётся такое $N \in \mathbb{N}$ и такое $M$, что для всех $n > N$, $a_n < Mc^n$. (Подсказка: $a_n = a_1 \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$.)
(c) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Задача 7.** Для любой последовательности $a_n$ рассмотрим последовательность её средних арифметических $b_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

(a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.
(b) (⌂) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

**Определение 1.** Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Пусть есть строго возрастающая последовательность $\{n_k\}$, элементы которой являются натуральными числами. Тогда можно рассмотреть последовательность $\{b_k\}$, $b_k = a_{n_k}$. Эта последовательность называется *подпоследовательностью* последовательности $\{a_n\}$.

**Задача 8.** (*) Докажите, что из любой последовательности можно выбрать нестрого монотонную подпоследовательность.