

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Семинар 2 (4 сентября 2020)**

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Пусть A и B — некоторые высказывания. Докажите, что если истинно высказывание $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то высказывания A и B или одновременно истинны, или одновременно ложны. (В этом случае говорят, что они являются *эквивалентными*, пишут $A \Leftrightarrow B$.)

Задача 2. (\heartsuit) Докажите, что высказывание $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ всегда истинно.

Задача 3. Рассмотрим отображение $f: X \rightarrow Y$. Запишите с помощью кванторов \forall и \exists , знаков $=$ и \neq , импликации \Rightarrow , конъюнкции, дизъюнкции, скобок и переменных, следующие утверждения:

- (a) Отображение f инъективно.
- (b) Отображение f сюръективно.
- (c) (\heartsuit) Отображение f биективно.

Задача 4. Даны следующие утверждения и предикаты ($x, y \in \mathbb{R}$):

- A : Все кошки серые;
- $B(x)$: $x + 5 = 10$;
- $C(x, y)$: $x^2 \leq y$;
- $E(x, y)$: $x^2 + y^2 = 0$.

Среди следующих утверждений укажите истинные:

- | | |
|--|--|
| (a) A ; | (n) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow E(x, y)$; |
| (b) $B(5)$; | (o) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow E(x, y)$; |
| (c) $C(x, -1)$; | (p) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow E(x, y)$; |
| (d) $A \vee B(5)$; | (q) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \wedge E(x, y)$; |
| (e) (\heartsuit) $A \wedge B(5)$; | (r) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: C(x, y) \Rightarrow E(x, y)$; |
| (f) $A \Rightarrow B(5)$; | (s) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: E(x, y) \Rightarrow C(x, y)$? |
| (g) $A \Rightarrow B(10)$; | (t) (\heartsuit) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: (C(x, y) \wedge E(x, y)) \Rightarrow \neg B(x)$ |
| (h) $\neg C(3, 4)$; | (u) (\heartsuit) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow C(x, y)$ |
| (i) $\forall x \in \mathbb{R}: B(x)$; | (v) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow B(y)$ |
| (j) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: C(x, y)$; | (w) (\heartsuit) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow B(y)$ |
| (k) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: C(x, y)$; | (x) (\heartsuit) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow B(y)$ |
| (l) (\heartsuit) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: \neg C(x, y)$; | |
| (m) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: B(x) \Rightarrow A$; | |

Задача 5. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений верны?

- (a) $\forall x \forall y \exists z: xy^2 < z$.
(b) $\forall x \forall z \exists y: xy^2 \leq z$.

- (c) $\exists z \forall x \exists y: xy^2 = z$.
(d) $\forall z \exists x \forall y: xy^2 \leq z$.

Задача 6. Записать отрицание к утверждению, не используя знак отрицания. Что верно: утверждение или его отрицание?

- (a) $\forall x: x^2 > 0$.
(b) $\forall x \exists y: x^2 > y^2$.

- (c) $\exists x: x^2 < 0$.
(d) $\exists x \forall y: xy > 0$.

Задача 7. (☒) Записать отрицания ко всем утверждениям из задачи 5, не используя знак отрицания.

Задача 8. Какие из следующих утверждений верны?

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}: x > 2 \Rightarrow |x| > 2$.
(b) $\forall x \in \mathbb{R}: x < 2 \Rightarrow |x| < 2$.
(c) $\forall x \in \mathbb{R}: |x - 3| < 1 \Rightarrow |x| < 4$.
(d) $\forall x \in \mathbb{R}: |x - 3| > 1 \Rightarrow |x| > 4$.
(e) $\forall x \forall y \exists z: (y > x) \Rightarrow (y > z) \wedge (z > x)$.
(f) $\forall \varepsilon \forall x: |x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 9| < 10\varepsilon$.
(g) $\forall \varepsilon \forall x: |x - 3| < \min(\varepsilon, 1) \Rightarrow |x^2 - 9| < 10\varepsilon$.
(h) (*) $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x: (\delta > 0) \wedge (|x - 3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \Rightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$.

Задача 9. Запишите с помощью кванторов следующие утверждения про натуральные числа n и m :

- (a) n делится на m ,
(b) n нечётно,
(c) n является простым числом,
(d) n и m взаимно просты.

Разрешено использовать только следующие объекты и операции:

- числа;
- переменные (в т.ч. не перечисленные в условии, если необходимо),
- проверку включения элемента во множество \in ,
- множества вещественных, рациональных, целых и натуральных чисел,
- арифметические операции: только сложение и умножение,
- сравнение двух чисел: операции $=$ и $>$.
- логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание (не должно стоять перед кванторами), импликация.