Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Семинар 1 (2 сентября 2020)

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Знаком (🏠) отмечены задачи или пункты для самостоятельного решения. Их не планируется обсуждать на семинаре, но они могут быть включены в самостоятельную работу наравне с остальными задачами.

Задача 1. Рассмотрим отображение $f\colon \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\} \to \{1, 2, 5\}$, заданное следующим образом:

x	$f(x)$
a	2
b	1
c	2
d	5

Является ли оно

(a) инъективным; (b) сюрьективным; (c) биективным?

Задача 2. Рассмотрим отображение $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, заданное следующим образом: $f(x) = x^2$. Является ли оно

(a) инъективным; (b) сюрьективным; (c) биективным?

Задача 3. (🏠) Рассмотрим отображение $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, заданное следующим образом: $f(x) = x^2$. Является ли оно

(a) инъективным; (b) сюрьективным; (c) биективным?

Задача 4. (*) Докажите, что если существует инъективное отображение $f\colon X \to Y$ и инъективное отображение $g\colon Y \to X$, то существует биективное отображение $h\colon X \to Y$.

Задача 5. Доказать, что квадратный корень из любого простого числа иррационален.

Задача 6. Может ли

(a) сумма двух рациональных чисел быть иррациональным числом?
(b) (🏠) сумма рационального и иррационального — рациональным?
(c) сумма двух иррациональных чисел — рациональным числом?
(d) (🏠) произведение двух иррациональных чисел — рациональным числом?

Задача 7. Доказать, что рациональные числа всюду плотны, то есть для любого интервала $(a; b)$, $b > a$, существует бесконечное количество рациональных чисел, принадлежащих этому интервалу.

Задача 8. (🏠) Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является иррациональным.

Задача 9. Доказать, что любое рациональное число задается бесконечной периодической десятичной дробью (быть может, с периодом (0)).

Задача 10. Доказать, что иррациональные числа тоже всюду плотны.

Задача 11. Чему равняется $1-0{,}(9)$?

Задача 12. Доказать, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь задает рациональное число.

Задача 13. Представьте, что вы — древний грек. Что вы можете сказать о числе π? Как доказать, используя только геометрические рассуждения, что $\pi > 3$? Что $\pi < 4$? Можете ли вы доказать более точные оценки?

Задача 14. Пусть a и b – целые числа и $a = bq + r$, где q и r тоже целые числа. Докажите, что в этом случае НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

Задача 15. (Алгоритм Евклида) Пусть a и b — целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \dots r_{n-1} > r_n > r_{n+1} = 0,$$

определена следующим образом: каждое r_k — это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а r_{n-1} делится на r_n нацело.

Докажите, что НОД$(a, b) = r_n$

Задача 16. Найти наибольший общий делитель (НОД) для чисел

(a) 6 и 15. (b) 228 и 60. (c) (🏠) 312 и 22

Задача 17. Покрыть прямоугольник

(a) 6×15 (b) 228×60 (c) (🏠) 312×22

одинаковыми квадратами с максимально возможной стороной.

Задача 18. (*) С помощью алгоритма Евклида доказать, что для любых натуральных чисел m и n найдутся такие целые числа s и t, что $sm + tn =$ НОД(m, n). Однозначным ли образом они определены?

Задача 19. С помощью предыдущей задачи доказать утверждение: если p и q взаимно просты, и при этом np делится на q, то n делится на q. (Все числа — целые.)

Задача 20. С помощью предыдущей задачи доказать единственность представления рационального числа в виде несократимой дроби. Иными словами, если $m/n = p/q$ и при этом m и n взаимно просты и p и q взаимно просты, то $m = p$ и $n = q$.