**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**
**Математический анализ 1** (http://math-info.hse.ru/s20/3)
**Дополнительные задачи для самостоятельного решения (часть 2) (23 декабря 2020 г.)**
*И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*

**Задача 1.** Пусть функция $f$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < a, \\ f_2(x), & x \geq a, \end{cases}$$

где $f_1$ и $f_2$ — всюду дифференцируемые функции. Докажите, что $f$ дифференцируема в точке $a$ тогда и только тогда, когда $f_1(a) = f_2(a)$ и $f_1'(a) = f_2'(a)$. Приведите пример, показывающий, что только второго условия недостаточно.

**Задача 2.** Докажите, что у производной не бывает точек разрыва первого рода, то есть для любой функции $f$, если $f'(x)$ существует при всех $x$ и существует предел $\lim_{x\to a} f'(x)$, то $f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x)$.
**Подсказка:** используйте теорему Лагранжа о конечных приращениях.

**Задача 3.** Найти интегралы

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cos 7x \, dx.$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \sin 7x \, dx.$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \sin 5x \, dx.$

**Подсказка**: пункт a) решается устно; в пункте b) дважды примените формулу интегрирования по частям: получится уравнение на искомый интеграл, оно задаёт значение этого интеграла однозначно; в пункте c) может быть полезна формула $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

**Задача 4.** Конечным рядом Фурье называется сумма

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — какие-то числа.

Докажите, что $a_m$ можно найти по формуле

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

*Оказывается, с помощью бесконечного ряда такого же вида можно представить любую дифференцируемую нечётную периодическую функцию.*

**Задача 5.** Докажите, что

(a) $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$ для любой функции $f$, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ (то есть функция должна быть дифференцируемой, а её производная — непрерывной на этом отрезке), и любого $x \in [a, b]$

(b) $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t)f''(t)\,dt$ для любой функции $f$, дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$. **Подсказка:** Используйте интегрирование по частям.

(c) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ для любой функции $f$, $n+1$ раз непрерывно дифференцируемой на $[a, b]$.