Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Дополнительные задачи для самостоятельного решения (часть 1) (11 декабря 2020 г.)

И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Задача 1. Пусть f и g имеют непрерывную первую производную в некоторой окрестности точки x_0 (включая точку x_0). Пусть также $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и существуте предел $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Докажите, не пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Иными словами, в задаче требуется доказать правило Лопиталя для случая непрерывно дифференцируемых функций. Это доказательство будет проще доказательства аналогичного факта в общем случае и не потребует обращения к теореме Лагранжа.

Задача 2. Пусть функция f имеет $(n+1)$ различный корень на отрезке $[a, b]$. Пусть она также n раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Докажите, что в этом случае найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что $f^{(n)}(c) = 0$.

Задача 3. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и возрастает на этой окрестности. Пусть также существует такая последовательность $\{x_n\}$, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n < x_0$ для всех n и $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Докажите, что в этом случае $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a$.

Задача 4. Докажите, что выпуклая вниз функция в любой точке имеет правую и левую производные.

Задача 5. Докажите, что через любую точку графика функции, (нестрого) выпуклой вниз, можно провести *опорную прямую*, то есть такую прямую, что весь график лежит (нестрого) выше неё. (При этом нет условия, чтобы функция была всюду дифференцируема.)

Задача 6. Пусть f выпукла вверх, а g выпукла вниз на отрезке $[a, b]$. Докажите, что функция $h(x) = f(x) - g(x)$ имеет не более одного локального максимума на $[a, b]$.

Задача 7. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$. Пусть известно, что для всех n, $|a_{n+1}/a_n| < 1$. Верно ли, что $\lim_{n\to\infty} a_n$
(a) равен нулю;
(b) существует?

Задача 8. Докажите, что если f и g непрерывны на $\mathbb{R}$, то функция $h(x) = \max(f(x), g(x))$ также является непрерывной на $\mathbb{R}$.

Задача 9. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0, 1)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$, то $f(x)$ ограничена на $[0, 1)$.

Задача 10. Привести пример функции, которая

(a) Непрерывна в нуле, но не имеет производной в этой точке.

(b) Дифференцируема в нуле, но не имеет второй производной в этой точке.

(c) Имеет первые 64 производные в нуле, но не имеет 65-ю производную в этой точке.

Задача 11. Верно ли, что $\frac{o(x)}{o(x)} = 1$ $(x \to 0)$?

Задача 12. Пусть функция f непрерывна на интервале $(-1, 0)$ и $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, но при этом $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq +\infty$ и $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq -\infty$. Докажите, что множество всех предельных точек функции f при $x \to 0^-$ содержит все вещественные числа.

Задача 13. Привести пример непостоянной функции, которая не является обратимой ни в какой окрестности точки 0.

Задача 14. Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки 0 и при этом её производная непрерывна. Пусть она не обратима ни в какой окрестности точки 0. Найти $f'(0)$.

Задача 15. Пусть $f'(0) = 0$. Верно ли, что функция f необратима в некоторой окрестности точки 0?

Задача 16. Найти максимальный отрезок, содержащий точку π, на котором функция $\sin$ обратима. Записать обратную на этом отрезке.

Задача 17. Пусть функция f дифференцируема в точке $x = 0$ и $f(0) = 6$. Пусть также функция $g(x) = |f(x) - 6|$ дифференцируема в точке $x = 0$. Найти $f'(0)$ и $g'(0)$.