Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Дополнительное домашнее задание «Открытые и замкнутые множества» (9 декабря 2020 г.)
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Определение 1. Подмножество X множества всех вещественных чисел называется *открытым*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $(a, b) \ni x$, целиком лежащая в X.

Определение 2. Подмножество X множества всех вещественных чисел называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus X$ является открытым.

Задача 1. (1) Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}$ является замкнутым если и только если предел любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$, лежит в X.

Задача 2. (1) Рассмотрим множество

(a) $[0, 1] \cup \{2\}$;
(b) $(0, 1) \cup \{2\}$;
(c) $(0, 1) \cup (1, 2)$;
(d) $[0, 2] \setminus \{1\}$;
(e) $\mathbb{Q}$;
(f) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Является ли оно замкнутым? Открытым? Ни тем ни другим?

Задача 3. (1) Является ли пустое множество замкнутым? А открытым? Аналогичный вопрос про $\mathbb{R}$.

Задача 4. (1) Докажите, что для любой последовательности множество всех её предельных точек замкнуто.

Задача 5. (1) Рассмотрим бесконечный набор множеств $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ — объединение всех этих множеств (элемент x принадлежит X, если найдётся такое n, что $x \in X_n$). Докажите, что если все X_n открыты, то X открыто. Коротко говорят: счётное объединение открытых множество открыто.

Задача 6. (1) Докажите, что счётное пересечение замкнутых множеств замкнуто.

Задача 7. (0,5) Обязательно ли счётное пересечение открытых множеств открыто?

Задача 8. (0,5) Обязательно ли счётное объединение замкнутых множеств замкнуто?

Задача 9. (*3) Докажите, что интервал нельзя разбить в объединение двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Определение 3. *Граничной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}$ называется такая точка a, что в любой её окрестности содержатся как точки из X, так и точки из дополнения к X. Множество всех граничных точек X называется *границей* и обозначается ∂X.

Задача 10. (1) Найти границу множества

(a) $[1, 2]$;
(b) $(1, 2)$;
(c) $[1, 2)$;
(d) $\mathbb{R}$;
(e) $\mathbb{Q}$;
(f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Определение 4. *Замыканием* множества X называется множество $\overline{X} = X \cup \partial X$. *Внутренностью* множества X называется множество $\mathring{X} = X \setminus \partial X$.

Задача 11. (1) Докажите, что замыкание множества является замкнутым множеством.

Задача 12. (1) Докажите, что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Задача 13. (1) Докажите, что внутренность любого множества является открытым множеством.

Задача 14. (1) Замыкание можно получить по-другому: добавить к множеству X множество всевозможных предельных точек всевозможных последовательностей, лежащих в множестве X. Докажите, что получится то же самое, что и раньше.

Задача 15. (1) Внутренней точкой множества называется точка, содержащаяся во множестве вместе с некоторой своей окрестностью. Докажите, что множество всех внутренних точек совпадает с внутренностью, определённой ранее.

Задача 16. (1) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество, ограниченное сверху. Докажите, что

$$\sup X \in \partial X.$$

Определение 5. Пусть $\{U_\alpha\}$ — некоторый набор открытых множеств в $\mathbb{R}$ (не обязательно конечный и даже не обязательно счётный — например, α может принимать значения в $\mathbb{R}$). Он называется *покрытием* множества $A \subset \mathbb{R}$ если

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \supset A.$$

Пример 1. Пусть $U_\alpha = (\alpha, 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Тогда набор $\{U_\alpha\}$ является покрытием для луча $[3, +\infty)$ и для интервала $(0, 2)$, но не является покрытием для отрезка $[0, 2]$.

Определение 6. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *компактом* если из любого покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выбрать такой *конечный* набор областей $U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_n}$, что он также является покрытием X, то есть

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k} \supset A.$$

(Такой набор называют «подпокрытием» и определение компактности часто формулируют коротко так: из любого покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.)

Задача 17. (1) Придумайте такое покрытие интервала $(0, 1)$, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Задача 18. (1) Докажите, что любой отрезок $[a, b]$ является компактом. (Подсказка: отрезок иногда полезно делить пополам.)

Задача 19. (0,5) Докажите, что любое замкнутое ограниченное множество является компактом.

Задача 20. (1) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — компакт, и про функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$ известно, что для всякой точки $x_0 \in X$ найдётся такое $\delta > 0$ и такое C, что для всякого $x \in U_\delta(x_0)$, $f(x) < C$. Докажите, что f ограничена сверху (на всём X).