Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год
Математический анализ 1 (http://math-info.hse.ru/s20/3)
Дополнительное домашнее задание «Комбинаторика» (13 октября 2020 г.)
И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих

Дополнительный листок разрабатывался и дорабатывался преподавателями этого курса разных лет, в числе которых — Ирина Хованская, Наталья Гончарук, Юрий Кудряшов, Лера Старичкова, Павел Соломатин, Сергей Головань, Дмитрий Дагаев, Мария Матушко и др.

Решения задач сначала нужно полностью записать, а затем уже сдавать устно. Все задачи, кроме отмеченных звездочкой * (их можно пропускать и сдавать в любом порядке), нужно сдавать по порядку. Удачи!

Задача 1. Семь студентов решили все вместе покататься
- (a) (0,5) на аттракционе «поезд», состоящем из семи одноместных вагончиков;
- (b) (0,5) на карусели, в которой семь одинаковых мест;
- (c) (0,5) на поезде из 10 одноместных вагончиков;
- (d) (0,5) на карусели, в которой 10 мест;
- (e) (*3) на поезде из семи двухместных вагончиков (места в вагоне не различаются)

Сколькими способами они смогут это сделать?

Задача 2. (1+0,5) Сколько существует отображений из множества из n элементов в множество из m элементов? Каким будет ответ, если добавить условие взаимной однозначности отображения?

Задача 3. (1) Сколькими способами можно представить множество A из n элементов в виде объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_m$. Здесь n и m фиксированы, наборы множеств, отличающиеся нумерацией, считаются различными (то есть, например, для $A = \{1, 2, 3\}$, $m = 2$, разбиение $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$ и разбиение $A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{1, 2\}$ считаются различными разбиениями) A_k может быть пустым?

Задача 4. (1) Азбука Морзе кодирует цифры и русские буквы последовательностями сигналов двух типов (точка и тире), при этом самые длинные последовательности состоят из пяти сигналов. Можно ли обойтись более короткими последовательностями?

Задача 5. (1) Сколько существует различных игральных кубиков? (На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6.)

Задача 6. Сколько существует семизначных телефонных номеров (последовательностей цифр от 0 до 9), в которых:
- (a) (1) не встречаются цифры 0 и 9;
- (b) (1) две одинаковые цифры не идут подряд;
- (c) (1) есть хотя бы две одинаковые цифры?

Задача 7. (1) На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $n \times k$ клеток. Найдите число $(n+k)$-звенных путей, идущих из левой нижней вершины A в противоположную вершину B по сторонам клеток (можно двигаться только вправо или наверх).

Задача 8. Сколькими способами можно разложить 17 одинаковых шариков по 9 пронумерованным ящикам, если

(a) (1) в каждом ящике должно быть хотя бы по одному шарику;
(b) (1) некоторые ящики могут быть пустыми?

Подсказка. Представьте, что Вы выложили 17 шариков в ряд и разделили их 8 перегородками на ящики.

Задача 9. (1) Сколько существует одночленов полной степени d от n переменных? Напомним, что одночленом степени d от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$, где $\sum_{i=1}^{n} m_i = d$ и $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задача 10. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых:

(a) (1) ровно четыре нуля;
(b) (1) по крайней мере четыре нуля;
(c) (2) по крайней мере два нуля и две девятки; (**подсказка**: воспользуйтесь формулой включений-исключений — изучите самостоятельно, что это такое);
(d) (1) каждая следующая цифра меньше предыдущей;
(e) (1) каждая следующая цифра не больше предыдущей?

Задача 11. (1) Как будут выглядеть слагаемые после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(x+y+z)^n$?

Задача 12. Имеется 4 чашки с разными рисунками, 4 одинаковых стакана, 10 одинаковых кусков сахара и 10 соломинок разного цвета. Сколькими способами можно разложить

(a) (1) сахар по чашкам;
(b) (1) соломинки по чашкам;
(c) (*3) соломинки по стаканам?