

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2020-21 уч. год**Математический анализ 1** (<http://math-info.hse.ru/s20/3>)**Программа теоретической части коллоквиума (5 декабря 2020)***И. Щуров, В. Болбачан, А. Дунайкин, Д. Леонкин, А. Трофимова, И. Эрлих*

Если в вопросе сформулировано или названо какое-то утверждение, требуется уметь приводить его доказательство, кроме случаев, когда явно оговорено обратное. Нужно уметь отвечать на вопросы по доказательству (например, «а если вот это условие в теореме убрать, в каком месте доказательство сломается?») и приводить соответствующие примеры и контрпримеры.

1. Высказывания, предикаты, кванторы. Алгебра логики. Отрицание утверждения с кванторами.
2. Способы доказательства: метод математической индукции, доказательство от противного. Неравенство Бернулли.
3. Основные классы чисел (без построения аксиоматики действительного числа). Рациональные и иррациональные числа. Наибольший общий делитель. Представление рациональных чисел в виде несократимой дроби. Иррациональность корня из двух.
4. Последовательность и ее свойства: ограниченные последовательности, монотонные последовательности. Арифметические действия с последовательностями.
5. Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности. Бесконечные пределы (∞ , $+\infty$, $-\infty$). Предел q^n при $n \rightarrow \infty$.
6. Арифметика пределов последовательности (теоремы о пределе суммы, произведения, частного последовательностей; квадратного корня из последовательности).
7. Предельный переход в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
8. Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грань. Точная верхняя и нижняя грань. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани (без доказательства).
9. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
10. Число e . (Доказательство существования, два способа представления.) Экспонента (определение через предел последовательности, доказательство, что для целых чисел x определение совпадает с e^x).
11. Подпоследовательность. Предельная точка последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Теорема Больцано — Вейерштрасса.
12. Функция одной переменной и её график. Основные типы преобразования графиков функций. Ограниченные и неограниченные функции. Точки локального экстремума.

13. Предел функции в точке и на бесконечности: определения по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений. Односторонние пределы. Бесконечный предел. Пределы на бесконечности.
14. Асимптоты и их нахождение.
15. Непрерывность функции. Арифметические действия над непрерывными функциями. Исследование непрерывности полинома, рациональных функций, корня, тригонометрических функций.
16. Теорема о пределе сложной функции. Композиция непрерывных функций.
17. Первый замечательный предел.
18. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.
19. Ограниченность непрерывной на отрезке функции.
20. Теорема о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своей точной верхней и нижней грани.
21. Производная функции одной переменной. Геометрическая интерпретация производной. Уравнение касательной.
22. Непрерывность дифференцируемой функции.
23. Необходимое условие точки локального экстремума дифференцируемой функции.
24. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Связь знака производной и возрастания/убывания функции на промежутке.
25. Вычисление производных. Производная суммы, произведения, частного, композиции функций.
26. Обратная функция. Логарифм, свойства логарифмов. Непрерывность обратной к непрерывной функции.
27. Производная обратной функции. Производные корня, логарифма, обратных тригонометрических функций.
28. Старшие производные. Выпуклость. Эквивалентность трёх утверждений о выпуклости дифференцируемой функции (выпуклость вниз, возрастание производной, график проходит над касательной в любой точке). Точки перегиба.
29. Теорема Коши. Правило Лопиталя (доказательство для случая $0/0$, предел в конечной точке).
30. O -большие и o -малые, их свойства.
31. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Её применение для вычисления пределов. Достаточное условие экстремума (через вторую производную).
32. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Её применение для приближённого вычисления значений функций.
33. Частные производные, их нахождение.