

Факультет компьютерных наук, 2020-21 уч. год

Кружок по дифференциальным уравнениям (<http://math-info.hse.ru/s20/b>)

Семинар 5. Линейные системы (9 декабря 2020 г.)

И. Щуров

Задача 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 3y \\ \dot{y} = 6x + 5y \end{cases}$$

- (a) Построить её фазовый портрет с помощью компьютера.
- (b) Записать систему в виде

$$\dot{z} = Az,$$

где $z(t) = (x(t), y(t))$ — вектор-функция, A — матрица.

- (c) Найти собственные векторы матрицы A . Нарисовать их на картинке с фазовым портретом.
- (d) Записать A в виде CDC^{-1} , где D — диагональная матрица.
- (e) В исходной системе сделать замену $z = Cw$. Решить получившуюся систему, построить фазовый портрет. Как связаны фазовые портреты исходной системы и системы в новых координатах?

Задача 2. Построить фазовый портрет системы

$$\dot{x} = \lambda x - 2y, \quad \dot{y} = 2x + \lambda y$$

для значений различных значений параметра λ (больше нуля, меньше нуля, нулевого). Как вы можете описать фазовые кривые? При каких значениях λ кривые выглядят замкнутыми? Докажите, что они при этом действительно замкнутые (найдите первый интеграл).