

Факультет компьютерных наук, 2020-21 уч. год

Кружок по дифференциальным уравнениям (<http://math-info.hse.ru/s20/b>)

Семинар 4. Первые интегралы (19 ноября 2020 г.)

И. Щуров

Задача 1. Найдите производную функции $F(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль следующих векторных полей:

- (a) $(2, 3)$; (b) (x, y) ; (c) (y, x) ; (d) $(1, -e^y)$.

Задача 2. Найти первый интеграл для следующих уравнений или систем. Как выглядят их фазовые кривые?

Подсказка. Для решения этой задачи можно поделить одно уравнение на другое и решить получающееся уравнение методом разделения переменных. Если уравнения фазовых кривых исходной системы записываются в виде $F(x, y) = C$, значит F — первый интеграл.

- (a) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -2x$;
 (b) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y$;
 (c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y$;
 (d) (*) $\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy$. (Попробуйте сделать замену $z = x/y$.)

Задача 3. (Частично основано на [1].) Докажите, что указанные функции являются первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

- (a) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x, \end{cases} \quad F(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}.$
 (b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y, \end{cases} \quad F(x, y) = x + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$
 (c) $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1+y^2} + y, \\ \dot{y} = y\sqrt{1+y^2}, \end{cases} \quad F(x, y) = xy - \sqrt{1+y^2}.$
 (d) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases} \quad F(x, y, z) = xy, \quad G(x, y, z) = yz.$

Задача 4. Рассмотрим модель Лотки—Вольтерра, описывающую динамику популяции хищников (y) и их жертв (x):

$$\dot{x} = kx - axy, \quad \dot{y} = -ly + bxy. \quad (1)$$

Здесь a, b, k, l — положительные параметры, $x \geq 0, y \geq 0$. Ранее с помощью численного интегрирования мы показали, что фазовые кривые системы похожи то ли на замкнутые кривые, то ли на спирали (численное решение за один период попадало не в точности ту точку, из которой стартовало). Докажите, что на самом деле это всё-таки замкнутые кривые. Найдите первый интеграл системы.

Задача 5. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = F(x),$$

задающее динамику частицы под действием силы, зависящей от её положения; пусть $x(t) \in \mathbb{R}$. Ей соответствует система

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = F(x).$$

- (a) Найдите первый интеграл этой системы в общем виде.
 (b) Пусть $F(x) = x^2 - 1$. Нарисуйте линии уровня первого интеграла (имеет смысл сделать это вручную, без компьютера — нужно выразить y через x и дальше нарисовать семейство графиков функций) и расставьте на них стрелочки в соответствии с направлением движения. Нарисуйте фазовые кривые с помощью компьютера.

Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.