Факультет компьютерных наук, 2020-21 уч. год
Кружок по дифференциальным уравнениям (http://math-info.hse.ru/s20/b)
Семинар 3. Единственность решений, уравнения с разделяющимися переменными и фазовые кривые (9 ноября 2020 г.)
И. Щуров

Задача 1. Найти все решения уравнения $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$ с начальным условием $x(0) = 0$.

Задача 2. Рассмотрим задачу Коши:

$$xy' = 3y, \quad y(-1) = 1.$$

(a) Показать, что любая функция вида

$$y(x) = \begin{cases} -x^3, & x \le 0; \\ Cx^3, & x > 0. \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению и начальному условию.

(b) Объяснить, почему это не противоречит теореме существования и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения?

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = \frac{f(y)}{g(x)} \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными.*

Замечание 1. *Для уравнений с разделяющимися переменными есть явный алгоритм отсыкания решений (правда, иногда эти решения могут будут заданы неявной функцией).*

Запишем уравнение (1) *в виде:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}$$

Дальше магия (мы обсудим, какой смысл означает это равенство, когда освоимся с дифференциальными формами):

$$\frac{dy}{f(y)} = \frac{dx}{g(x)}$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{dx}{g(x)}$$

После интегрирования получается равенство, связывающее y и x, то есть выражающее неявно функцию $y(x)$.

Если была поставлена задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, решение можно записать в таком виде:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dz}{f(z)} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} \tag{2}$$

Задача 3. (*) Пусть $F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dz}{f(z)}$ и $y = y(x)$ — некоторая функция.

(a) Найти $\frac{d}{dx} F(y(x))$ (выразить результат через $f(y(x))$ и $y'(x)$).

(b) Дифференцируя обе части равенства (2) по переменной x, показать, что функция $y(x)$, удовлетворяющая (2), удовлетворяет также (1), то есть является решением исходного уравнения.

Задача 4. Найдите все решения уравнения с разделяющимися переменными. Нарисуйте соответствующее поле направлений и его *интегральные кривые.*

(a) $y' = y/x$;
(b) $y' = 2y/x$;
(c) $y' = y/(2x)$;
(d) $y' = -y/x$;
(e) $y' = -x/y$;
(f) $y' = xy$;
(g) $y' = -xy$.

Определение 2. *Траекторией* непрерывной вектор-функции $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ называется кривая

$$\{x(t) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n,$$

с указанным на ней направлением движения при возрастании t. Можно также сказать, что траектория — это проекция графика функции на пространство значений $\mathbb{R}^n$.

Задача 5. (Эту задачу можно пропустить, если понятно, как она делается.) Нарисовать графики и траектории следующих вектор-функций. Для каждой вектор-функции для каких-нибудь трёх различных значений t (обозначаемых t_i, $i = 1, 2, 3$), найти $\dot\varphi(t_i)$ и на рисунке с траекторией отложить от точки $\varphi(t_i)$ вектор, равный $\dot\varphi(t_i)$.

(a) $\varphi(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$;
(b) $\varphi(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi)$;
(c) $\varphi(t) = (t\cos t, t\sin t), \quad t \geq 0$;
(d) $\varphi(t) = (\sqrt{1-t}, \sqrt{t}), \quad t \in [0, 1]$.

Задача 6. Для следующих систем уравнений построить векторные поля. Убедиться, что фазовые кривые касаются векторов векторного поля в каждой своей точке.

(a) $\dot x = 2, \quad \dot y = 1$;
(b) $\dot x = 0, \quad \dot y = y$;
(c) $\dot x = 1, \quad \dot y = y$;
(d) $\dot x = x, \quad \dot y = y$;
(e) $\dot x = 2x, \quad \dot y = y$;
(f) $\dot x = x, \quad \dot y = -y$;
(g) $\dot x = x^2, \quad \dot y = -y$;
(h) $\dot x = x^3, \quad \dot y = -y$.

Теорема 1. *Рассмотрим автономную систему*

$$\dot x = f(x, y), \quad \dot y = g(x, y). \tag{3}$$

и неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \tag{4}$$

Для любой точки $P = (x_0, y_0)$, такой, что $f(x_0, y_0) \neq 0$, фазовая кривая автономной системы (3)*, проходящая через P, в некоторой окрестности P совпадает с интегральной кривой соответствующего неавтономного уравнения* (4)*.*

Задача 7. Для следующих систем уравнений убедиться в том, что теорема 1 работает.

(a) $\dot x = x, \quad \dot y = y$;
(b) $\dot x = x, \quad \dot y = -y$;
(c) $\dot x = x^2, \quad \dot y = -y$;
(d) $\dot x = -y, \quad \dot y = x$.

Список литературы

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.