

Факультет компьютерных наук, 2020-21 уч. год

Кружок по дифференциальным уравнениям (<http://math-info.hse.ru/s20/b>)

Семинар 2. Численное интегрирование дифференциальных уравнений (2.10.2020)

И. Щуров

Задача 1. Напишите функцию `rk4(rhs, t0, X0, T, n)`, аналогичную функции `euler` с занятия, но реализующую метод Рунге — Кутты 4 порядка (RK4).

Задача 2. Пусть мы сделали n шагов одного из двух численных метода (Эйлера и RK4) и получили приближение для значения $x(T)$ истинного решения в точке $t = T$ (T фиксировано и не зависит от n). Обозначим это приближение за \tilde{x}_n . Ошибка приближения будет задаваться как

$$\delta(n) = |x(T) - \tilde{x}_n|.$$

Возьмите какое-нибудь из уравнений, для которых известно истинное решение (например, $\dot{x} = x$), и для каждого из реализованных методов постройте график зависимости величины

$$\frac{\ln \delta(n)}{\ln \Delta t(n)}$$

от $\Delta t(n)$, где $\Delta t(n) = (T - t_0)/n$, $n = 1, \dots, 10000$. На основе графика сделайте предположение, какова асимптотическая ошибка каждого из методов. (То есть хочется получить утверждение типа «ошибка $\delta(n)$ зависит от шага как $O(\Delta t(n)^\alpha)$ для какого-то α ».)

Задача 3. С помощью какого-нибудь из методов численного решения дифференциальных уравнений постройте фазовые кривые следующих систем для различных начальных условий. Опишите качественно, как ведут себя решения.

(a) $\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2;$

(b) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 0;$

(c) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y;$

(d) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y;$

(e) $\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y;$

(f) $\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = y;$

(g) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x;$

(h) $\dot{x} = x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 2xy.$

Задача 4. Решите аналитически все системы из предыдущего номера, кроме двух последних пунктов. Эти системы состоят из двух независимых уравнений, каждое из которых можно решить явно с помощью метода из первой лекции. Тогда решение системы складывается как $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t)$ и $y(t)$ — решения каждого из уравнений. Для каждой из систем найдите уравнение фазовых кривых, то есть зависимость $x(y)$ или $y(x)$. (После того, как решения найдены, это уже просто упражнение по алгебре: нужно сначала выразить, например, t через x с помощью одного решения, а потом подставить результат в другое решение.) Сверьте результаты с результатами численного моделирования: похожи ли ваши фазовые кривые, найденные численно, на кривые, задаваемые найденными уравнениями?