

Факультет компьютерных наук, 2020-21 уч. год

Кружок по дифференциальным уравнениям (<http://math-info.hse.ru/s20/b>)

Семинар 1. Основные понятия, автономные уравнения на прямой (26.10.2020)

И. Щуров

Задача 1. Для каждого уравнения построить его поле направлений. Пользуясь полем направлений, нарисовать эскизы интегральных кривых. Угадать общее решение, построить «настоящие» интегральные кривые и сравнить с эскизом.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \dot{x} = 0; & \text{(c)} \dot{x} = 2t; & \text{(e)} \dot{x} = -\frac{x}{t}; & \text{(g)} (*) \dot{x} = \frac{2x}{t}. \\ \text{(b)} \dot{x} = -1; & \text{(d)} \dot{x} = \frac{x}{t}; & \text{(f)} \dot{x} = -\frac{t}{x}; & \end{array}$$

Задача 2. [2] Рассмотрим задачу роста популяции, аналогичную разобранный на лекции. Предположим, что из-за ограниченности ресурсов коэффициент прироста (доля популяции, воспроизводящаяся за единицу времени) не является постоянным, а зависит от x как линейная функция: $a - bx$. (С ростом x всё меньшему числу особей удаётся найти достаточно ресурсов, чтобы продолжить род.) Пусть $a = b = 1$. Записать дифференциальное уравнение, описывающее данную модель. Построить поле направлений. Найти все постоянные решения (состояния равновесия). Найти все решения (осторожно с раскрытием модулей в логарифмах — не упустите ничего!) Что вы можете сказать про состояния равновесия: к каким из них траектория приближается с течением времени, а от каких убегает?

Задача 3. [2], см. также [4] и [5]. Предположим, что скорость прироста популяции пропорциональна не числу особей, а *квадрату* числа особей. Составить и решить соответствующее уравнение, построить поле направлений и интегральные кривые. Что вы можете сказать о вертикальных асимптотах решения? Какую интерпретацию этого явления вы можете привести? Что вы можете сказать об области определения решений?

Задача 4. Решая уравнение $y' = y$ с начальным условием $y(0) = 1$ методом Эйлера и устремляя шаг к нулю, найти выражение для числа e .

Задача 5. Реализуйте на любом языке программирования (например, на Python) функцию для решения дифференциальных уравнений методом Эйлера. С помощью этой функции постройте приближения к графикам решений уравнений:

- (a) $\dot{x} = x^2$;
- (b) $\dot{x} = x$;
- (c) уравнений из всех предыдущих задач.

Сопоставьте результаты с полученные теоретически. Проследите, как приближения зависят от выбора числа отрезков разбиения.

Задача 6. [6] Найти все¹ решения уравнений. Также найти явно все решения с заданными начальными условиями, если они указаны.

(a) $y' = x^2$.

(b) $y' = e^x$.

(c) $y' = e^y$.

(d) $\dot{x} = t^2 + 1, x(1) = 2$

(e) $\dot{x} = 2x + t, x(0) = -1/4$ (подсказка: рассмотреть замену $z = 2x + t$).

Построить поле направлений и эс-

киз интегральных кривых.

(f) $\dot{x} = x^2 + 1$.

(g) $\dot{x} = x \ln x, x > 0$.

(h) $\dot{x} = 10^x$.

(i) $\dot{x} = 1/(t + 2x); x(0) = -1$. Построить поле направлений и эскиз интегральных кривых.

Список литературы

- [1] Malthus *An Essay on the Principle of Population*. London: J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. EconLib-1798
- [2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.
- [3] Solow, Robert W., *A Contribution to the Theory of Economic Growth* Quarterly Journal of Economics, February 1956, pp. 65-94.
- [4] Heinz von Foerster, P. M. Mora and L. W. Amiot (November 1960) *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millenia*. Science **132** (3436): 1291–1295. doi:10.1126/science.132.3436.1291
- [5] Щуров И. В. На пути к концу света. // N+1, 9.07.2015. <https://nplus1.ru/material/2015/07/09/doomsday>.
- [6] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

¹Строго говоря, мы ещё не обсуждали теорему, которая бы позволила доказать, что найдены действительно все решения; найдите по крайней мере все решения, которые можно найти с помощью методов, обсуждавшихся на лекции.