

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год****Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)**Семинар 16. Линейные системы и уравнения высших порядков (15 мая)***И. Щуров, М. Матушко***Задача 1.** Постройте полиномиальное векторное поле, имеющее

- (а) два предельных цикла;
- (б)  $n$  предельных циклов.

**Определение 1.** Квазимногочлен — это конечная сумма функций вида  $P(t)e^{\lambda t}$ , где  $P(t)$  — многочлен (быть может, с комплексными коэффициентами),  $\lambda$  — константа (быть может, комплексная). Степенью квазимногочлена называется максимальная из степеней многочленов  $P(t)$ , входящих в его конструкцию.

**Задача 2.** Покажите, что функция  $f(t) = e^{2t} \sin \pi t + \cos 2t - t^2 + t^3 \sin t$  — квазимногочлен. Найдите его степень.

**Задача 3.** Рассмотрим линейный дифференциальный оператор  $D_\lambda$ , действующий на гладких функциях следующим образом:

$$(D_\lambda f)(t) = \frac{d}{dt} f(t) - \lambda f(t) = \left( \frac{d}{dt} - \lambda \right) f(t)$$

- (а) Найти  $D_\lambda(t^n e^{\mu t})$ , где  $n$  — некоторое фиксированное натуральное число,  $\mu$  — некоторое фиксированное (вообще говоря, комплексное) число.
- (б) Доказать, что пространство всех квазимногочленов инвариантно под действием  $D_\lambda$  (то есть образ квазимногочлена есть квазимногочлен).
- (в) Пусть  $f(t) = P(t)e^{\mu t}$  — квазимногочлен степени  $n$ . Что можно сказать про степень  $D_\lambda f$  в зависимости от значений  $\lambda$  и  $\mu$ ? Может ли степень увеличиться? Уменьшиться?
- (г) Рассмотрим уравнение  $D_2 x = 0$  относительно неизвестной функции  $x(t)$ . Найдите все его решения.
- (д) Рассмотрим уравнение  $D_2 x = e^{3t}$ . Будем искать его частное решение в виде квазимногочлена вида  $P(t)e^{3t}$ . Какой максимальной степени можно выбрать многочлен  $P(t)$ ? Записать этот многочлен в общем виде, подставить в уравнение и найти, чему равны его коэффициенты (метод неопределенных коэффициентов). Записать общее решение этого уравнения (напоминание: общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного).
- (е) Выполнить предыдущий пункт для уравнения  $D_2 x = e^{2t}$ . Что принципиально изменилось?
- (з) Найти все решения уравнения  $\dot{x} - x = te^t + e^{2t}$ .

**Задача 4.** Рассмотрим оператор  $D = D_2 \circ D_3 = \left( \frac{d}{dt} - 2 \right) \left( \frac{d}{dt} - 3 \right)$ .

- (а) Найти  $Df(t)$ .
- (б) Найти  $D(t^n e^{\nu t})$ . Какова степень получающегося квазимногочлена в зависимости от значения  $\nu$ ? (Подсказка: проще всего подействовать сначала одним оператором композиции, затем другим.)
- (в) При каких  $\mu$  функция  $x(t) = e^{\mu t}$  является решением уравнения  $Dx = 0$ ?
- (г) Найти частное решение уравнения  $Dx = e^t$ . Найти его общее решение. Подсказка: действовать по аналогии с пунктом 3е предыдущей задачи.
- (д) Выполнить предыдущий пункт для уравнения  $Dx = e^{2t}$ . Что изменилось?
- (е) Найти все решения уравнения  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = te^t + e^{2t} + e^{3t}$ .

**Задача 5.** Рассмотрим оператор  $D = D_i \circ D_{-i} = \left( \frac{d}{dt} - i \right) \left( \frac{d}{dt} + i \right)$ .

- (а) Найти  $Df(t)$ .
- (б) Найти  $D(t^n \sin \nu t)$  и  $D(t^n \cos \nu t)$ . Какова степень получающегося квазимногочлена в зависимости от значения  $\nu$ ?

- (c) При каких  $\mu$  функция  $x(t) = e^{\mu t}$  является решением уравнения  $Dx = 0$ ?
- (d) При каких  $\mu$  функция  $x(t) = \sin(\mu t)$  является решением уравнения  $Dx = 0$ ?
- (e) Найти частное решение уравнения  $Dx = \sin 2t$ . Найти его общее решение. Подсказка: действовать по аналогии с пунктом 3e предыдущей задачи. Искать решение в виде квазимногочлена вида  $P(t) \sin 2t + Q(t) \cos 2t$ .
- (f) Выполнить предыдущий пункт для уравнения  $Dx = \sin t$ . Что изменилось?

**Задача 6.** Рассмотрим осциллятор с периодическим внешним возмущением (элементарную модель качелей):

$$\ddot{x} = x + \sin \omega t.$$

При каком значении параметра  $\omega \in \mathbb{R}$  у системы существуют неограниченные решения? Какому физическому явлению это соответствует?