

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год**Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)**Семинар 13. Линейные системы и нелинейные особые точки (23.04)***И. Щуров, М. Матушко***Задача 1.** Найти e^A для

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 2. Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^6$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Найти вещественное решение этой системы с произвольным вещественным начальным условием $z(0) = z^0$.(b) Найти все начальные условия, при которых $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.**Задача 3.** Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^4$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти все её решения.

Задача 4. Пусть $z(t) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему $\dot{z} = Az$, где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Найти все её решения. Как выглядят фазовые траектории? Придумайте название для такой особой точки.

Задача 5. [2] Исследовать особые точки следующих систем. Найти линеаризацию системы в каждой особой точке, определить тип особой точки. Нарисовать примерно вид фазовых портретов вблизи каждой особой точки.

(a)
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$$

(d) (*)
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

Список литературы

- [1] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
- [2] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.