

**Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год****Дифференциальные уравнения** (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)**Семинар 12. Линейные системы: комплексные собственные значения (10.04)***И. Щуров, М. Матушко***Задача 1.** Решить уравнение на комплексной прямой  $z(t) \in \mathbb{C}$ :

(a)  $\dot{z} = -2iz$ .

(b)  $\dot{z} = (2 + 4i)z$ .

(c)  $\dot{z} = (-1 + i)z$ .

**Задача 2.** Пусть  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Записать уравнения из задачи 1 в матричном виде в координатах  $(x, y)$ . Записать решения получившихся уравнений. Нарисовать фазовые портреты.**Задача 3.** Найти все вещественные решения следующих систем. Определить тип особой точки.

(a)  $\dot{x} = -x - 2y, \quad \dot{y} = 4x + 3y$ .

(c)  $\dot{x} = 8x + 25y, \quad \dot{y} = -2x - 6y$ .

(b)  $\dot{x} = -x - 5y, \quad \dot{y} = x + y$ .

(d)  $\dot{x} = 5x + 4y, \quad \dot{y} = -10x - 7y$ .

**Указание.** Найти какой-нибудь собственный вектор  $v$  матрицы системы. Он окажется комплексным, сопряженный к нему вектор также будет собственным (с сопряженным собственным значением). Пусть соответствующее собственное значение равно  $\lambda = \alpha + i\omega$ . Тогда у уравнения есть решения  $ve^{\lambda t}$  и  $\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$ , а также, по линейности, все их линейные комбинации. Чтобы найти вещественные решения, достаточно взять вещественную и мнимую части  $ve^{\lambda t}$  (почему они будут решениями?) и все их линейные комбинации.

(Почему этот рецепт эквивалентен методу, обсуждавшемуся на лекции?)

**Задача 4.** При каком значении параметра  $\alpha$  система имеет особую точку типа «центр»? Нарисовать фазовый портрет системы при этом значении  $\alpha$ .

$$\dot{x} = \alpha x + 2y, \quad \dot{y} = -5x - 3y$$

**Задача 5.** Рассмотрим линейную систему на плоскости. Пусть она имеет особую точку известного типа (седло, узел, центр или фокус). Существует ли в окрестности начала координат непрерывный непостоянный первый интеграл?**Задача 6.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -x - y, \quad \dot{z} = z.$$

Найти все её решения. Как выглядят её фазовые кривые? Для каких начальных условий  $(x_0, y_0, z_0)$  решение имеет конечный предел при  $t \rightarrow +\infty$ ?**Задача 7.** Определить тип особой точки в зависимости от значения параметра  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\dot{x} = x + \alpha y, \quad \dot{y} = 5x + 2y.$$

**Задача 8.** (\*) Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = -\omega x_4, \quad \dot{x}_4 = \omega x_3.$$

При каких значениях  $\omega \in \mathbb{R}$  у этой системы существует периодическое решение, у которого все компоненты являются непостоянными?