

Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Дифференциальные уравнения (<http://math-info.hse.ru/s19/g>)
Семинар 9. Линейные уравнения (13.03.2020)

И. Щуров, М. Матушко

Задача 1. С помощью метода вариации постоянных решите следующие уравнения:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad y = x(y' - x \cos x); & \text{(c)} \quad 2x(x^2 + y)dx = dy; & \text{(e)} \quad (2e^y - x)y' = 1; \\ \text{(b)} \quad xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}; & \text{(d)} \quad (x + y^2)dy = ydx; & \text{(f)} \quad y' = \frac{y}{3x - y^2}. \end{array}$$

Задача 2. Пусть $\varphi(t; x_0)$ — решение уравнения

$$\text{(a)} \quad \dot{x} = (t + x^2) \sin(x + x^2); \quad \text{(b)} \quad \dot{x} = e^{t \cos x} (\cos(\sin x) - 1);$$

с начальным условием $\varphi(0; x_0) = x_0$. Найти $\left. \frac{\partial \varphi(t; x_0)}{\partial x_0} \right|_{x_0=0}$.

Задача 3. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два каких-то различных решения неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Выразить через них решение того же уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$ для произвольных t_0, x_0 .

Задача 4. Найти все решения уравнения, представляющиеся в виде $x(t) = Ce^{\lambda t}$. Найти все решения уравнения.

$$\text{(a)} \quad \ddot{x} - 4x = 0; \quad \text{(b)} \quad \ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0; \quad \text{(c)} \quad \ddot{x} + 4x = 0;$$

Задача 5. [1] Рассмотрим уравнение $\dot{x} + x = f(t)$, где $|f(t)| \leq M$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

- Показать, что это уравнение имеет ровно одно решение, ограниченное при всех t .
- Найти это решение.
- Показать, что найденное решение периодическое, если функция $f(t)$ периодическая.

Задача 6. [1] Рассмотрим уравнение

$$(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad x > -1/2$$

- Какова размерность пространства решений этого уравнения?
- Угадать два каких-нибудь решения этого уравнения. (Подсказка: Поищите решения в виде многочленов или $e^{\lambda x}$.)
- Найти все решения этого уравнения.

Разное

Задача 7. Найти все значения параметра s , при которых система

$$\dot{x} = 5y, \quad \dot{y} = sx$$

имеет непостоянные периодические решения. Для каждого из этих значений s записать уравнение фазовых кривых, соответствующих периодическим решениям.

Задача 8. Пусть $(x(t), y(t))$ — решение системы

$$\dot{x} = 6x^4, \quad \dot{y} = -7y \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = 1, y(0) = 6$. Найти $\inf_t y(t)$ и $\sup_t y(t)$, где инфимум и супремум берутся по всем t , при которых решение определено.

Задача 9. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = 5xz, \quad \dot{y} = -6y, \quad \dot{z} = 0.$$

Найти все начальные условия, при которых решение имеет конечный предел при $t \rightarrow +\infty$.

Список литературы

- [1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.