Совместный бакалавриат ВШЭ-РЭШ, 2019-20 уч. год
Дифференциальные уравнения (http://math-info.hse.ru/s19/g)
Семинар 6. Уравнения в полных дифференциалах и первые интегралы (21.02.12)
И. Щуров, М. Матушко

Определение 1. Уравнение
$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0 \tag{1}$$
называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция $H(x,y)$, что левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом $dH(x,y)$, то есть $F(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}$ и $G(x,y) = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y}$.

Замечание 1. *Интегральными кривыми уравнения* (1) *являются линии уровня функции H.*

Теорема 1. *Уравнение* (1) *является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$.*

Задача 1. (*) Докажите теорему 1.

Замечание 2. *Если выполняется условие теоремы 1, функцию H можно найти следующим образом: проинтегрировать функцию F по x, полагая y фиксированным; при этом константа интегрирования будет зависеть от y, и её можно будет найти, подставив результат интегрирования в уравнение $\frac{\partial H}{\partial y} = G$.*

Задача 2. Найти выражение, задающее интегральные кривые следующих уравнений:

(a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$;

(b) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$;

(c) $\dot{x} = \dfrac{t(9tx^2 - 2)}{x(4x^2 - 6t^3)}$;

(d) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

Линейные уравнения первого порядка

Определение 2. Уравнение вида
$$y' = a(x)y \tag{2}$$
называется *однородным линейным уравнением* (первого порядка в размерности 1, с переменными коэффициентами), а уравнение
$$y' = a(x)y + b(x) \tag{3}$$
называется *неоднородным* линейным уравнением.

Замечание 3. *Однородное линейное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.*

Задача 3. (*) Решить уравнение (2) в общем виде.

Замечание 4. *Уравнение* (3) *превращается в уравнение в полных дифференциалах, если домножить его на функцию*
$$I(x) = e^{-\int a(x)dx}.$$

Задача 4. Решить следующие уравнения.

(a) $\dot{x} = x + t$;

(b) $xy' - 2y = 2x^4$;

(c) $(2x+1)y' = 4x + 2y$;

(d) $(xy + e^x)dx - x\,dy = 0$;

(e) $x^2y' + xy + 1 = 0$;

(f) $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$.

Задача 5. Найдите производную функции $F(x, y) = x^2 - y^2$ вдоль следующих векторных полей:

(a) $(2, 3)$; (b) (x, y); (c) (y, x); (d) $(1, -e^y)$.

Задача 6. [1] Найти первый интеграл для следующих уравнений или систем. Как выглядят их фазовые кривые?

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dot{x} = 2y + xe^{-y} \\ \dot{y} = e^{-y} \end{cases}$

Задача 7. (Частично основано на [1].) Докажите, что указанные функции являются первыми интегралами данных систем дифференциальных уравнений.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2 - y^2 - x, \end{cases} \quad F(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}.$

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 + y, \end{cases} \quad F(x, y) = x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}.$

(c) $\begin{cases} \dot{x} = -x\sqrt{1 + y^2} + y, \\ \dot{y} = y\sqrt{1 + y^2}, \end{cases} \quad F(x, y) = xy - \sqrt{1 + y^2}.$

(d) $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z, \end{cases} \quad F(x, y, z) = xy, \quad G(x, y, z) = yz.$

Определение 3. Функции $f_1, \dots, f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ назвываются *независимыми* в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если дифференциалы этих функций в точке x являются линейно независимыми.

Задача 8. В каких точках независимы следующие функции:

(a) $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$;
(b) $f(x, y) = x$, $g(x, y) = x - y^2$;
(c) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = e^{x+y}$;
(d) $f(x, y) = x$, $g(x, y) = x^2 + y^2$.

Задача 9. Найдите какие-нибудь первые интегралы для системы. Сколько независимых во всех, кроме, быть может, конечного числа точек первых интегралов вы можете найти?

(a) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$

Список литературы

[1] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальных уравннеиям. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.